ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
1ης ΔΙΑΛΥΚΕΙΑΚΗΣ ΓΡΑΠΤΗΣ ΔΟΚΙΜΑΣΙΑΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΑΝΑΤΟΛΙΚΗΣ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΠΕΜΠΤΗ 25 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2024

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν $y=\alpha^x=e^{x\ln\alpha}$ και θέσουμε $u=x\ln\alpha$, τότε έχουμε $y=e^u$. Επομένως,

$$y'=\left(e^u\right)'=e^u\cdot u'=e^{x\ln\alpha}\cdot\ln\alpha=\alpha^x\ln\alpha.$$

Α2. Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\ell$, τότε η ευθεία $y=\ell$ λέγεται **οριζόντια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.

Α3. Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha,\beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m.

Δηλαδή, υπάρχουν $x_1,x_2\in[\alpha,\beta]$ τέτοια, ώστε, αν $m=f(x_1)$ και $M=f(x_2)$, να ισχύει

$$m\le f(x)\le M,\ \text{για κάθε}\ \ x\in[\alpha,\beta].$$

Α4. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. **Αρχική συνάρτηση** ή **παράγουσα της f στο Δ** ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει

$$F'(x)=f(x),\ \text{για κάθε}\ \ x\in\Delta.$$

Α5. $1\to\Lambda$ $\quad 2\to\Sigma$ $\quad 3\to\Lambda$ $\quad 4\to\Lambda$ $\quad 5\to\Lambda$

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{2-x}$ έχει πεδίο ορισμού $A_f=(-\infty,2]$ και η $g(x)=2-x^2$ έχει πεδίο ορισμού $A_g=[0,+\infty)$.

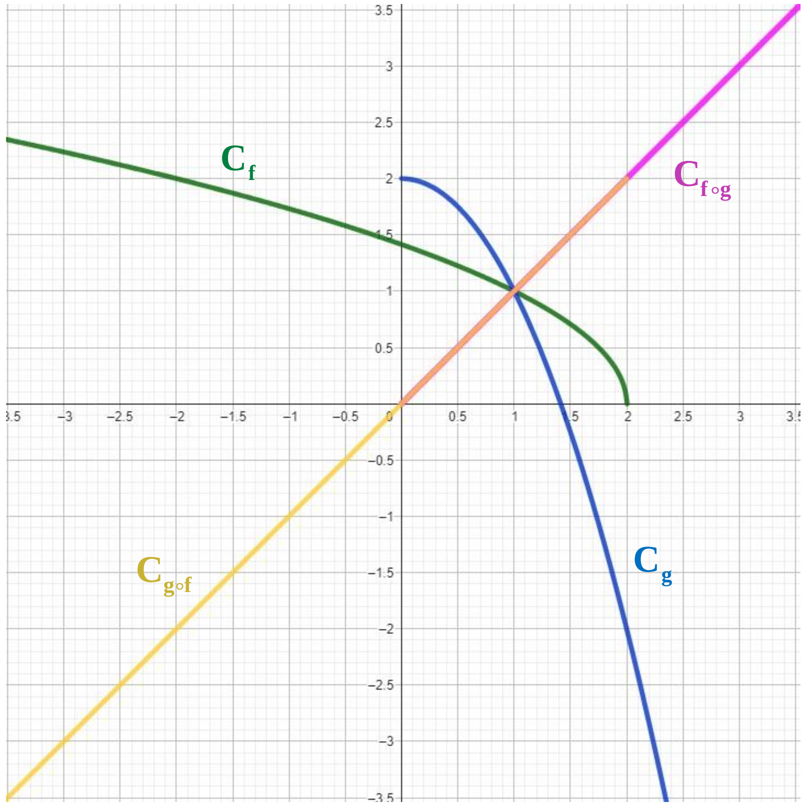
Η συνάρτηση $f\circ g$ ορίζεται αν και μόνο αν το σύνολο $\{x\in A_g \text{ και } g(x)\in A_f\}\ne\varnothing$, το οποίο θα είναι και το πεδίο ορισμού της. Είναι:

$$\{x\in A_g \text{ και } g(x)\in A_f\}=\{x\ge0 \text{ και } g(x)\le2\}=\{x\ge0 \text{ και } 2-x^2\le2\}=$$
$$=\{x\ge0 \text{ και } x^2\ge0\}=[0,+\infty)\ne\varnothing$$

Άρα η συνάρτηση $f\circ g$ ορίζεται και έχει πεδίο ορισμού $A_{f\circ g}=[0,+\infty)$. Επίσης είναι

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\sqrt{2-g(x)}=\sqrt{2-2+x^2}=\sqrt{x^2}=|x|$$

Επομένως είναι $\mathbf{(f\circ g)(x)=x,\ \ x\in[0,+\infty)}$. Ομοίως προκύπτει ότι $\mathbf{(g\circ f)(x)=x,\ \ x\in(-\infty,2]}$, άρα οι συναρτήσεις **$f\circ g$ και $g\circ f$ δεν είναι ίσες** αφού $A_{f\circ g}\ne A_{g\circ f}$.



Β2.i. Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{2-x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,2)$ με $f'(x)=-\dfrac{1}{2\sqrt{2-x}}<0$,

άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε το σύνολο τιμών της είναι:

$$\mathbf{f\left((-\infty,2]\right)=\left[f(2),\lim_{x\to-\infty}f(x)\right)=[0,+\infty)}$$

ii. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,2]$, άρα 1−1 οπότε ορίζεται η αντίστροφή της f^{-1} με πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών της f, δηλαδή $A_{f^{-1}}=[0,+\infty)$. Επομένως για κάθε $x\in(-\infty,2]$ και $y\geq 0$ είναι $f(x)=y\Leftrightarrow\sqrt{2-x}=y\Leftrightarrow 2-x=y^2\Leftrightarrow x=2-y^2$. Άρα

$$\mathbf{f^{-1}(x)=2-x^2,\ x\in[0,+\infty)},\ \text{δηλαδή } f^{-1}=g.$$

Β3. Είναι $h(x)=\dfrac{2-x^2}{x}, x\in(0,+\infty)$, οπότε:

- $\lim\limits_{x\to0^+}h(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2-x^2}{x}=$, άρα **κατακόρυφη ασύμπτωτη $x=0$** (ο θετικός ημιάξονας Oy)

Αναζητούμε οριζόντια ή πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{h(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2-x^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x^2}{x^2}=-1\in\mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(h(x)+x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2-x^2}{x}+x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2-x^2+x^2}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}=0$

Άρα **πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την $y=-x$.**

Β4. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\left(f(x)-g(x)\right)\cdot \eta\mu\dfrac{1}{1-x}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\left[\left(\sqrt{2-x}-2+x^2\right)\cdot \eta\mu\dfrac{1}{1-x}\right]$ (μηδενική επί φραγμένη)

Για $x\neq 1$ έχουμε

$$\left|\left(\sqrt{2-x}-2+x^2\right)\cdot \eta\mu\frac{1}{1-x}\right|=\left|\sqrt{2-x}-2+x^2\right|\cdot\left|\eta\mu\frac{1}{1-x}\right|\leq\left|\sqrt{2-x}-2+x^2\right|, \text{ άρα}$$

$$-\left|\sqrt{2-x}-2+x^2\right|\leq\left(\sqrt{2-x}-2+x^2\right)\cdot \eta\mu\frac{1}{1-x}\leq\left|\sqrt{2-x}-2+x^2\right|$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 1}\left(-\left|\sqrt{2-x}-2+x^2\right|\right)=\lim\limits_{x\to 1}\left(\left|\sqrt{2-x}-2+x^2\right|\right)=0$, σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής έχουμε

$$\mathbf{\lim_{x\to 1}\left[\left(\sqrt{2-x}-2+x^2\right)\cdot \eta\mu\frac{1}{1-x}\right]=0}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.i. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, άρα συνεχής και στο $x_0=1$, οπότε

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1+} f(x)=f(1) \quad (1)$$

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(e^{\lambda}-1-\ln x\right)=e^{\lambda}-1$
- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\lambda+\ln x\right)=\lambda$
- $f(1)=e^{\lambda}-1$

Άρα η σχέση (1) γράφεται $e^{\lambda}-1=\lambda \Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\lambda=0}$

επειδή $e^x\geq x+1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$

ii. Για $\lambda=0$ είναι

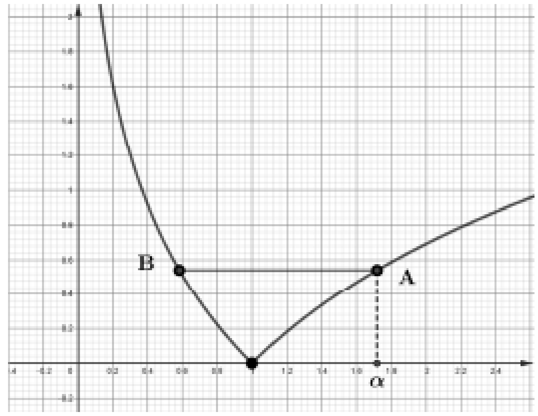
$$f(x)=\begin{cases}-\ln x, & 0<x\leq 1\\ \ln x, & x>1\end{cases}$$

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-\ln x}{x-1}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to 1^-}\left(-\dfrac{1}{x}\right)=-1$
- $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\ln x}{x-1}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{1}{x}\right)=1$

Άρα $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\neq\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$, οπότε η συνάρτηση f **δεν είναι παραγωγίσιμη** στο $x_0=1$

Γ2.i. Είναι $AB//x'x$, οπότε αν $B(x_B, y_B)$ έχουμε:



$y_B = y_A = \ln\alpha$ και $y_B = -\ln x_B \left(0 < x_B < 1\right)$. Άρα:

$$-\ln x_B = \ln\alpha \Leftrightarrow \ln x_B = -\ln\alpha \Leftrightarrow \ln x_B = \ln\alpha^{-1} \Leftrightarrow x_B = \frac{1}{\alpha}$$

Οπότε $\mathbf{B\left(\frac{1}{\alpha}, \ln\alpha\right)}$.

ii. Είναι $f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x}, & 0 < x < 1 \\ \dfrac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}$

Αν λ_1, λ_2 οι συντελεστές διεύθυνσης των εφαπτόμενων $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ της C_f στα B και A αντίστοιχα, είναι

$\lambda_1 = f'\left(\frac{1}{\alpha}\right) = -\frac{1}{\frac{1}{\alpha}} = -\alpha$ και $\lambda_2 = f'(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$, άρα $\boldsymbol{\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = -1 \Leftrightarrow \varepsilon_1 \perp \varepsilon_2}$.

Γ3. Για $\alpha = 2$ είναι $B\left(\frac{1}{2}, \ln 2\right)$ και $A(2, \ln 2)$, άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E(\Omega) = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(\ln 2 - f(x)\right)dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\ln 2 - (-\ln x)\right)dx + \int_{1}^{2} \left(\ln 2 - \ln x\right)dx =$$

$$= \ln 2 \cdot [x]_{\frac{1}{2}}^{1} + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \ln x\,dx + \ln 2 \cdot [x]_1^2 - \int_1^2 \ln x\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln 2 + \ln 2 + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x' \cdot \ln x\,dx - \int_1^2 x' \cdot \ln x\,dx =$$

$$= \frac{3}{2}\ln 2 + [x\ln x]_{\frac{1}{2}}^{1} - \int_{\frac{1}{2}}^{1} x \cdot (\ln x)'dx - [x\ln x]_1^2 + \int_1^2 x \cdot (\ln x)'dx =$$

$$= \frac{3}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} - \int_{\frac{1}{2}}^{1} x \cdot \frac{1}{x}dx - 2\ln 2 + \int_1^2 x \cdot \frac{1}{x}dx =$$

$$= \frac{3}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2} - 2\ln 2 + 1 = \frac{1}{2} \text{ μον. εμβαδού}$$

Γ4. Είναι $d(A,B) = x_A - x_B = \alpha - \frac{1}{\alpha}$, οπότε $d(t) = \alpha(t) - \frac{1}{\alpha(t)}$. Η συνάρτηση d είναι παραγωγίσιμη

με παράγωγο $d'(t) = \alpha'(t) + \frac{1}{\alpha^2(t)}\alpha'(t)$, οπότε τη χρονική στιγμή $t = t_0$ είναι

$$d'(t_0) = \alpha'(t_0) + \frac{1}{\alpha^2(t_0)}\alpha'(t_0) = 4 + \frac{1}{2^2} \cdot 4 = 5 \text{ cm/sec}.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Πρόσημο της τιμής $f(2)$

- f συνεχής στο $[1,2]$
- f παραγωγίσιμη στο $(1,2)$

άρα σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ υπάρχει $\xi \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1} \overset{f(1)=-1}{=} f(2)+1$

Αλλά $f'(x)>2$ για κάθε $x\in(1,2)$, οπότε $f'(\xi)>2 \Leftrightarrow f(2)+1>2 \Leftrightarrow f(2)>1$

Ύπαρξη ρίζας της εξίσωσης $f(x)=0$ στο διάστημα $(1,2)$

- f συνεχής στο $[1,2]$
- $f(1)=-1<0,\ f(2)>1>0,$ άρα $f(1)\cdot f(2)<0$

Σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα $x_0\in(1,2)$.

Μοναδικότητα ρίζας

Είναι $f'(x)>2$ για κάθε $x\in(1,2)$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής, άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,2]$, οπότε η ρίζα x_0 είναι μοναδική.

Δ2.i Η συνάρτηση $g(x)=e^{-x}f(x)-x+e^{-x}$ είναι παραγωγίσιμη ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$g'(x)=-e^{-x}f(x)+e^{-x}f'(x)-1-e^{-x}=e^{-x}\left(f'(x)-f(x)\right)-1-e^{-x} \overset{f'(x)-f(x)=1+e^x}{=} e^{-x}\left(1+e^x\right)-1-e^{-x}=0$$

Άρα η συνάρτηση g είναι σταθερή, δηλαδή $g(x)=c,\ x\in\mathbb{R}$.

ii. Αλλά $g(1)=e^{-1}f(1)-1+e^{-1} \overset{f(1)=-1}{=} -e^{-1}-1+e^{-1}=-1$, οπότε $g(x)=-1,\ x\in\mathbb{R}$ και επομένως

$$e^{-x}f(x)-x+e^{-x}=-1 \Leftrightarrow e^{-x}f(x)=-1+x-e^{-x} \Leftrightarrow f(x)=-e^x+xe^x-1=e^x(x-1)-1$$

Άρα $f(x)=e^x(x-1)-1,\ x\in\mathbb{R}$

iii. Η εξίσωση $x=2024e^{-x}+1$ διαδοχικά γράφεται:

$$x=2024e^{-x}+1 \Leftrightarrow xe^x=2024e^{-x}e^x+e^x \Leftrightarrow xe^x=2024+e^x \Leftrightarrow xe^x-e^x=2024 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow e^x(x-1)-1=2023 \Leftrightarrow f(x)=2023$$

Άρα αρκεί να δείξουμε ότι η τιμή 2023 ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x)=e^x(x-1)+e^x=xe^x$

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow xe^{x}=0 \Leftrightarrow x=0$
- $f'(x)<0 \Leftrightarrow xe^{x}<0 \Leftrightarrow x<0$
- $f'(x)>0 \Leftrightarrow xe^{x}>0 \Leftrightarrow x>0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	Ο.Ε $f(0)=-2$	$\nearrow$

Έστω $A_1=(-\infty,0)$ και $A_2=[0,+\infty)$, οπότε

- $f((-\infty,0)) \overset{f\ \text{γν.φθ.}}{=} \left(\lim\limits_{x\to 0^-} f(x), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right)=(-2,-1)$ επειδή $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)=-2$ και

  $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left((x-1)e^{x}-1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x-1}{e^{-x}}-1\right)=-1$ αφού $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-1}{e^{-x}} \overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{-e^{-x}}=0$

  Οπότε $2023\notin f(A_1)$

- $f([0,+\infty)) \overset{f\ \text{γν.αύξ.}}{=} \left[f(0), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=[-2,+\infty)$ επειδή $f(0)=-2$ και

  $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left((x-1)e^{x}-1\right)=(+\infty)\cdot(+\infty)-1=+\infty$

  Οπότε $2023\in f(A_2)$, άρα η εξίσωση $f(x)=2023$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο A_2 η οποία είναι και μοναδική επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο A_2.

Δ3. i. Η συνάρτηση $f'(x)=xe^{x}$ είναι παραγωγίσιμη ως γινόμενο παραγωγίσιμων με παράγωγο

$$f''(x)=e^{x}+xe^{x}=(x+1)e^{x}$$

- $f''(x)=0 \Leftrightarrow (x+1)e^{x}=0 \Leftrightarrow x=-1$
- $f''(x)<0 \Leftrightarrow (x+1)e^{x}<0 \Leftrightarrow x<-1$
- $f''(x)>0 \Leftrightarrow (x+1)e^{x}>0 \Leftrightarrow x>-1$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\frown$	Σ.Κ	$\smile$

Επομένως η συνάρτηση f είναι κοίλη στο $(-\infty,-1]$ και κυρτή στο $[-1,+\infty)$ και η γραφική της παράσταση έχει σημείο καμπής το $(-1,-2e^{-1}-1)$

ii. Α΄ τρόπος (κυρτότητα και εφαπτομένη)

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο με τετμημένη x_0 έχει εξίσωση $\varepsilon: y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

- $f(x_0)=0$
- $f(x_0)=(x_0-1)e^{x_0}-1 \overset{f(x_0)=0}{\Rightarrow} (x_0-1)e^{x_0}-1=0 \Leftrightarrow e^{x_0}=\dfrac{1}{x_0-1}$ (1)
- $f'(x_0)=x_0e^{x_0}$

Οπότε $\varepsilon: y=x_0e^{x_0}(x-x_0)$. Η f είναι κυρτή στο $\Delta=[-1,+\infty)$, άρα η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται κάτω από τη γραφική της παράσταση με εξαίρεση το σημείο επαφής τους. Άρα

$$f(x)\geq x_0e^{x_0}(x-x_0)\Leftrightarrow \frac{f(x)}{e^{x_0}}\geq x_0(x-x_0)\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\frac{f(x)}{\frac{1}{x_0-1}}\geq x_0(x-x_0)\Leftrightarrow (x_0-1)f(x)\geq x_0(x-x_0)$$

Β΄ τρόπος (Θ.Μ.Τ)

Εφαρμόζοντας Θ.Μ.Τ για την f στο $[x_0,x]$ προκύπτει ότι υπάρχει $\xi\in[x_0,x]$ τέτοιο ώστε

$f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\overset{f(x_0)=0}{=}\dfrac{f(x)}{x-x_0}$. Αλλά είναι

$$x_0<\xi\overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow}f'(x_0)<f'(\xi)\Leftrightarrow f'(x_0)<\frac{f(x)}{x-x_0}\Leftrightarrow x_0e^{x_0}<\frac{f(x)}{x-x_0}\Leftrightarrow f(x)>x_0e^{x_0}(x-x_0)$$

$$\Leftrightarrow\frac{f(x)}{e^{x_0}}>x_0(x-x_0)\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\frac{f(x)}{\frac{1}{x_0-1}}>x_0(x-x_0)\Leftrightarrow(x_0-1)f(x)>x_0(x-x_0)$$

Για $x=x_0$ προφανώς ισχύει η ισότητα, άρα τελικά $(x_0-1)f(x)\geq x_0(x-x_0)$

Δ4. Από ερώτημα Δ1. έχουμε $x_0\in(1,2)$

Είναι $|\eta\mu f'(x)|\leq|f'(x)|$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$.

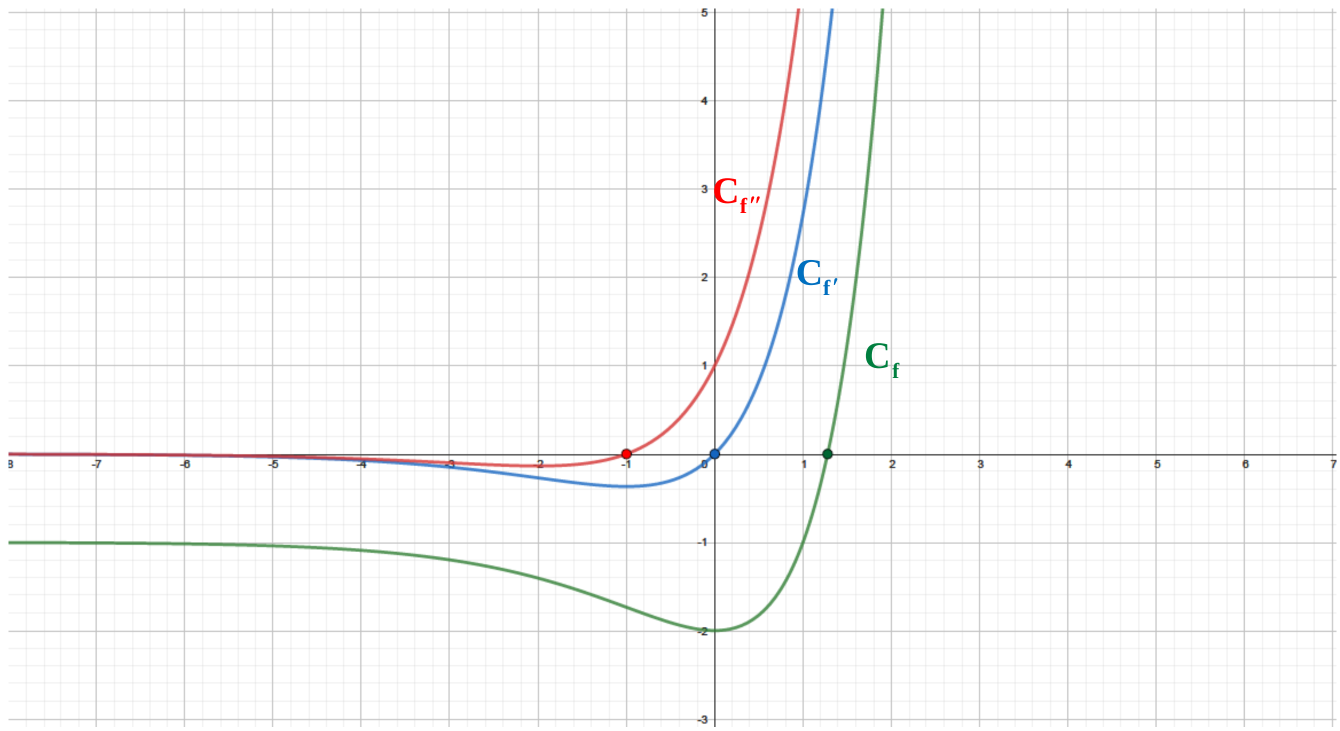
Αλλά $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(x_0,2)$, άρα

$$|\eta\mu f'(x)|<f'(x),\ \text{και επειδή}\ \eta\mu f'(x)>0\ \text{για κάθε}\ x\in(x_0,2)$$

$$\eta\mu f'(x)<f'(x)$$

Επομένως είναι:

$$\int_{x_0}^{2}\eta\mu f'(x)dx<\int_{x_0}^{2}f'(x)dx=[f(x)]_{x_0}^{2}=f(2)-f(x_0)=e^2-1.$$



$C_{f''}$
$C_{f'}$
C_f