

1<sup>η</sup> ΔΙΑΔΥΚΕΙΑΚΗ ΓΡΑΠΤΗ ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ  
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ  
ΑΝΑΤΟΛΙΚΗΣ ΘΕΣ/ΝΙΚΗΣ

ΠΕΜΠΤΗ 25 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2024

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ  
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ : ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x) = a^x$ ,  $a > 0$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$

και ισχύει  $f'(x) = a^x \cdot \ln a$  **(μονάδες 6)**

**A2.** Πότε η ευθεία  $y = l$  λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας

συνάρτησης  $f$  στο  $+\infty$ ; **(μονάδες 3)**

**A3.** Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής. **(μονάδες 3)**

**A4.** Τι ονομάζεται αρχική συνάρτηση ή παράγουσα μιας συνάρτησης  $f$  σε ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της; **(μονάδες 3)**

**A5.** Να χαρακτηριστούν ως Σωστές ή Λανθασμένες οι παρακάτω προτάσεις:

**1.** Αν  $f$  μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα  $[a, \beta]$  τότε το ολοκλήρωμα  $\int_a^\beta f(x) dx$  παριστάνει πάντα το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη  $C_f$  τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες  $x = a$  και  $x = \beta$

**2.** Αν η συνεχής συνάρτηση  $f$  δεν είναι παντού μηδέν στο  $[a, \beta]$ , με  $a < \beta$  και ισχύει

$$\int_a^\beta f(x) dx = 0 \text{ τότε η } f \text{ παίρνει δύο τουλάχιστον ετερόσημες τιμές στο } [a, \beta].$$

**3.** Ισχύει ότι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$ , με  $a > 1$

**4.** Αν το άθροισμα δύο συναρτήσεων  $f$  και  $g$  είναι συνεχής συνάρτηση, τότε καθεμιά από τις  $f$  και  $g$  θα είναι συνεχής συνάρτηση.

**5.** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή στο  $\Delta$ , τότε ισχύει  $f''(x) > 0$  για κάθε  $x \in \Delta$ .

**(μονάδες 10)**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \sqrt{2-x}$  ,  $x \in (-\infty, 2]$  και  $g(x) = 2-x^2$  ,  $x \in [0, +\infty)$

**B1.** Να ορίσετε τις συναρτήσεις  $f \circ g$  και  $g \circ f$  . Να εξεταστεί αν ισχύει  $f \circ g = g \circ f$  .

(μονάδες 8)

**B2. i)** Να βρεθεί το σύνολο τιμών της  $f$  . (μονάδες 2)

**ii)** Να εξετάσετε αν υπάρχει η αντίστροφη  $f^{-1}$  της  $f$  και , αν υπάρχει, να την προσδιορίσετε. (μονάδες 4)

(μονάδες 6)

**B3.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$h(x) = \frac{g(x)}{x} , x \in (0, +\infty)$$

(μονάδες 6)

**B4.** Να βρεθεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow 1} \left[ (f(x) - g(x)) \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{1-x}\right) \right]$

(μονάδες 5)

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} e^\lambda - 1 - \ln x , & 0 < x < 1 \\ \lambda + \ln x , & x \geq 1 \end{cases}$

**Γ1. i)** Να αποδειχθεί ότι  $\lambda = 0$  . (μονάδες 4)

**ii)** Να εξεταστεί αν η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 1$  . (μονάδες 4)

(μονάδες 8)

Στο διπλανό διάγραμμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ .

Αν το σημείο  $A$  έχει συντεταγμένες  $A(a, \ln a)$  με  $a > 1$  , και το ευθύγραμμο τμήμα  $AB$  είναι παράλληλο στον άξονα  $x'x$ ,

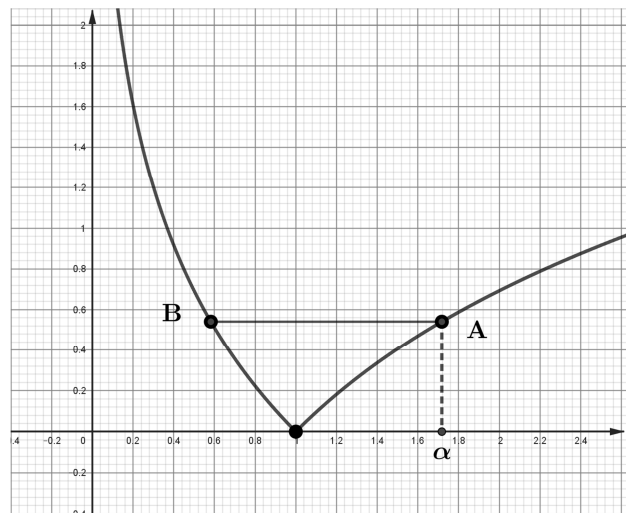
**Γ2.** Να αποδειχθεί ότι :

**i)** οι συντεταγμένες του σημείου  $B$  της  $C_f$  είναι

$$B\left(\frac{1}{a}, \ln a\right) . \text{ (μονάδες 3)}$$

**ii)** οι εφαπτόμενες της  $C_f$  στα σημεία  $A$  και  $B$  είναι κάθετες μεταξύ τους. (μονάδες 3)

(μονάδες 6)



**Γ3.** Για  $\alpha = 2$  να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη  $C_f$  και το ευθύγραμμο τμήμα AB. **(μονάδες 7)**

**Γ4.** Αν το  $\alpha$  μεταβάλλεται με ρυθμό  $\alpha'(t) = 4 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$ , να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης AB τη χρονική στιγμή  $t_0$  όπου  $\alpha(t_0) = 2$  **(μονάδες 4)**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν :

- $f'(x) > 2$ , για κάθε  $x \in (1, 2)$
- $f(1) = -1$

**Δ1.** Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει μοναδική ρίζα  $x_0$  στο διάστημα  $(1, 2)$ . **(μονάδες 4)**

Αν επιπλέον ισχύει ότι  $f(x) + 1 = f'(x) - e^x$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ ,

**Δ2.** i) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση  $g(x) = e^{-x} f(x) - x + e^{-x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  είναι σταθερή. (μονάδες 3)

ii) Να αποδειχθεί ότι  $f(x) = (x - 1)e^x - 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$  (μονάδες 2)

iii) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης  $x = 2024e^{-x} + 1$ . (μονάδες 4)

**(μονάδες 9)**

**Δ3.** i) Να μελετηθεί η  $f$  ως προς την κυρτότητα και την ύπαρξη σημείων καμπής.

(μονάδες 3)

ii) Να αποδειχθεί ότι για κάθε  $x \geq -1$  ισχύει  $(x_0 - 1)f(x) \geq x_0 \cdot (x - x_0)$

Για ποια τιμή του  $x$  ισχύει η ισότητα; (μονάδες 4)

**(μονάδες 7)**

**Δ4.** Να αποδειχθεί ότι  $\int_{x_0}^2 \eta \mu f'(x) dx < e^2 - 1$  **(μονάδες 5)**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις μόνο με μπλε ή μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε διορθωτικό (blanco).
6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά την διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : ενενήντα (90') λεπτά μετά από την διανομή των φωτοαντιγράφων.

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**