17.

$\Delta\acute{\iota}\nu\varepsilon\tau\alpha\iota\ \eta\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}\ \gamma\iota\alpha\ \tau\eta\nu\ o\pi o\acute{\iota}\alpha\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}o\upsilon\nu:$

- $f(1)=5$
- $xf'(x)=2(1-f(x)),\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x>0$

(I) Να αποδείξετε ότι $f(x)=1+\dfrac{4}{x^2},\ x>0$

(II) Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται απο την C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=\lambda$ με $0<\lambda\neq 1$

(III) Αν $\lambda>1$ και το λ αυξάνει με ρυθμό 3 μον./sec, τότε να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού $E(\lambda)$ την στιγμή που είναι $\lambda=2$

$$xf'(x)=2(1-f(x))\Leftrightarrow xf'(x)=2-2f(x)\Leftrightarrow xf'(x)+2f(x)=2$$

Πολλαπλασιάζω και
τα δυο μέλη με το x
Επειδή $x>0$ θα έχω $x\neq 0$
Αν $\alpha\neq 0$ τότε ισχύει η
ισοδυναμία:
$\alpha x=\alpha y\Leftrightarrow x=y$

$$\Leftrightarrow\quad x(xf'(x)+2f(x))=2x\Leftrightarrow x^2f'(x)+2xf(x)\overset{(x^2)'=2x}{=}2x\Leftrightarrow$$

$$x^2f'(x)+(x^2)'f(x)=(x^2)'\ \overset{F'(x)G(x)+F(x)G'(x)=[F(x)G(x)]'}{\Longleftrightarrow}\ [f(x)x^2]'=(x^2)'$$

Επειδή $[f(x)x^2]'=(x^2)'$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ θα υπάρχει $c\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε για κάθε $x\in(0,+\infty)$ να ισχύει $f(x)x^2=x^2+c$

$f(x)x^2=x^2+c,\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in(0,+\infty)\ (1)$

Αν $x=1$ απο την σχέση (1) θα έχω:

$$f(x)x^2=x^2+c\ \overset{\Theta\acute{\varepsilon}\tau\omega\ x=1}{\Longrightarrow}\ f(1)\bullet 1^2=1^2+c\ \overset{f(1)=5}{\Longrightarrow}\ 5=1+c\Leftrightarrow c=5-1\Leftrightarrow c=4$$

$$\begin{Bmatrix} f(x)x^2=x^2+c \\ \Gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in(0,+\infty)\end{Bmatrix}\overset{c=4}{\Longleftrightarrow}\begin{Bmatrix} f(x)x^2=x^2+4 \\ \Gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in(0,+\infty)\end{Bmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} f(x)=\dfrac{x^2+4}{x^2} \\ \Gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in(0,+\infty) \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} f(x)=\dfrac{x^2}{x^2}+\dfrac{4}{x^2} \\ \Gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in(0,+\infty) \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} f(x)=1+\dfrac{4}{x^2} \\ \Gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in(0,+\infty) \end{Bmatrix}$$

(II) $\underline{\mathrm{A}\nu\ \lambda\in(0,1)}$

$$\mathrm{E}(\lambda)=\int_{\lambda}^{1}|f(x)|dx=\int_{\lambda}^{1}\left|1+\frac{4}{x^2}\right|dx \overset{1+\frac{4}{x^2}>0,\, x\neq 0}{=} \int_{\lambda}^{1}\left(1+\frac{4}{x^2}\right)dx \overset{\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}}{=}$$

$$\left[x-\frac{4}{x}\right]_{\lambda}^{1}=-3-\left(\lambda-\frac{4}{\lambda}\right)=-3-\lambda+\frac{4}{\lambda}$$

$\underline{\mathrm{A}\nu\ \lambda\in(1,+\infty)}$

$$\mathrm{E}(\lambda)=\int_{1}^{\lambda}|f(x)|dx=\int_{1}^{\lambda}\left|1+\frac{4}{x^2}\right|dx \overset{1+\frac{4}{x^2}>0,\, x\neq 0}{=} \int_{1}^{\lambda}\left(1+\frac{4}{x^2}\right)dx \overset{\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}}{=}$$

$$\left[x-\frac{4}{x}\right]_{1}^{\lambda}=\lambda-\frac{4}{\lambda}-(-3)=\lambda-\frac{4}{\lambda}+3$$

$$\mathrm{E}(\lambda)=\begin{cases} -3-\lambda+\dfrac{4}{\lambda},\lambda\in(0,1) \\ \lambda-\dfrac{4}{\lambda}+3,\lambda\in(1,+\infty) \end{cases}$$

$(\mathrm{III})\,\acute{E}\chi\omega\ \ \lambda'(t)=3\ \mu o\nu./\sec\ \kappa\alpha\iota\ \lambda(t_0)=2\mu o\nu.$

$\mathrm{A}\nu\ \lambda(t)>1\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\mathrm{E}(t)=\lambda(t)-\frac{4}{\lambda(t)}+3$$

$$\mathrm{E}'(t)=\lambda'(t)-4\left(\frac{1}{\lambda(t)}\right)' \overset{\left(\frac{1}{F(x)}\right)'=-\frac{F'(x)}{F^2(x)}}{=} \lambda'(t)-4\frac{-\lambda'(t)}{\lambda^2(t)}=\lambda'(t)+4\frac{\lambda'(t)}{\lambda^2(t)}$$

Την χρονική στιγμή t_0 *ο ρυθμός μεταβολής του μεταβολής του εμβαδού* $\mathrm{E}(\lambda)$ *θα είναι*:

$$\frac{d\mathrm{E}}{dt}\Big|_{t=t_0}=\mathrm{E}'(t_0)=\lambda'(t_0)+4\frac{\lambda'(t_0)}{\lambda^2(t_0)}=3+4\frac{3}{2^2}=3+\cancel{4}\frac{3}{\cancel{4}}=3+3=$$

$=6\mu o\nu.^2/\sec$

18.

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *με*
• $f(x-y)f(x+y)=5$ *για κάθε* $x,y\in\mathbb{R}$
• $f(1)>0$
(I) *Να βρεθεί ο τύπος της* f
(II) *Να υπολογιστεί το* $f(2)f(-2)$

Αν $y=0$ θα έχω:

$$f(x-y)f(x+y)=5 \overset{y=0}{\Longrightarrow} f(x-0)f(x+0)=5 \Leftrightarrow f^2(x)=5 \Leftrightarrow f(x)=\pm\sqrt{5}$$

Έστω η f δεν είναι σταθερή τότε θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \neq x_2$ και $f(x_1)=\sqrt{5}$ και $f(x_2)=-\sqrt{5}$

<u>Αν $x_1 < x_2$:</u>

$$\left\{\begin{array}{l} (\mathrm{I})\ \text{Η } f \text{ είναι συνεχής στο κλειστό διάσημα } [x_1, x_2] \\ (\mathrm{II})\ f(x_2)=-\sqrt{5}<0<\sqrt{5}=f(x_1) \end{array}\right\}$$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών στο κλειστό διάστημα $[x_1, x_2]$ υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ με $f(\xi)=0$ (ΑΤΟΠΟ)

<u>Αν $x_1 > x_2$:</u>

$$\left\{\begin{array}{l} (\mathrm{I})\ \text{Η } f \text{ είναι συνεχής στο κλειστό διάσημα } [x_2, x_1] \\ (\mathrm{II})\ f(x_2)=-\sqrt{5}<0<\sqrt{5}=f(x_1) \end{array}\right\}$$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών στο κλειστό διάστημα $[x_2, x_1]$ υπάρχει $\xi \in (x_2, x_1)$ με $f(\xi)=0$ (ΑΤΟΠΟ)

Συνεπώς η f είναι σταθερή συνάρτηση. Οπότε $f(x)=c$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Έχω: $f(1)=c \overset{f(1)>0}{\Longleftrightarrow} c>0$

Έχω: $f^2(x)=5 \overset{f(x)=c>0}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{l} c^2=5 \\ c>0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow c=\sqrt{5}$

Οπότε $f(x)=\sqrt{5}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα: $f(2)f(-2)=\sqrt{5}\sqrt{5}=5$

19.

Αν για κάποιο αριθμό m είναι $\int_{m+1}^{2m}\left(e^x+3x^2-2x\right)dx=0$, να αποδείξετε ότι $m=1$

$\boxed{e^x \geq x+1}$

$\underline{\text{Αν } m+1<2m}$

$e^x \geq x+1 \Rightarrow e^x+3x^2-2x \geq 3x^2-2x+x+1 \Rightarrow e^x+3x^2-2x \geq 3x^2-x+1$

$\Theta\varepsilon\omega\rho\acute{\omega}\ \tau o\ \tau\rho\upsilon\acute{\omega}\nu\upsilon\mu o\ \varphi(x)=3x^2-x+1$

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-1)^2-4\bullet 3\bullet 1=-11<0$

Ε$\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ \Delta<0\ \kappa\alpha\iota\ \alpha=1>0\ \tau o\ \tau\rho\upsilon\acute{\omega}\nu\upsilon\mu o\ \varphi(x)\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \pi\alpha\nu\tau o\acute{\upsilon}\ \theta\varepsilon\tau\iota\kappa\acute{o}$

$$e^x+3x^2-2x \geq 3x^2-x+1>0 \Rightarrow e^x+3x^2-2x>0 \Rightarrow \int_{m+1}^{2m}\left(e^x+3x^2-2x\right)dx>0$$

(ΑΤΟΠΟ)

$\underline{\text{Αν } m+1>2m}$

$$0=\int_{m+1}^{2m}\left(e^x+3x^2-2x\right)dx=-\int_{2m}^{m+1}\left(e^x+3x^2-2x\right)dx \Rightarrow \int_{2m}^{m+1}\left(e^x+3x^2-2x\right)dx=0$$

$$e^x+3x^2-2x>0 \Rightarrow \int_{2m}^{m+1}\left(e^x+3x^2-2x\right)dx>0\text{(ΑΤΟΠΟ)}$$

Ο$\pi\acute{o}\tau\varepsilon: m+1=2m \Leftrightarrow m=1$

20.

Ν$\alpha\ \beta\rho\varepsilon\theta\varepsilon\acute{\iota}\ \tau o\ L=\lim_{x\to+\infty}\left(e^{x^2\eta\mu\frac{1}{x}}-e^x\right)$

$$g(t)=\eta\mu t+t-\frac{t^3}{6},t\geq 0,g'(t)=\sigma\upsilon\nu t+1-\frac{t^2}{2},g''(t)=-\eta\mu t-t$$

$\text{Α}\nu\ t>0\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:|\eta\mu t|<|t|\Rightarrow|\eta\mu t|<t\Rightarrow -t<\eta\mu t<t\Rightarrow -t<\eta\mu t\Rightarrow$

$-t-\eta\mu t<0\Rightarrow g''(t)<0\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ t>0$

$$\left.\begin{cases}(\mathrm{I})\,g''(t)<0\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ t\in(0,+\infty)\\(\mathrm{II})\,\mathrm{H}\ g'\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ [0,+\infty)\end{cases}\right\}\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ g'\overset{\vee}{\downarrow}[0,+\infty)$$

$$\text{Α}\nu\ t>0\overset{g'\overset{\vee}{\downarrow}[0,+\infty)}{\Longrightarrow}g'(t)<g'(0)\Rightarrow g'(t)<0$$

$$\left.\begin{cases}(\mathrm{I})\,g'(t)<0\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ t\in(0,+\infty)\\(\mathrm{II})\,\mathrm{H}\ g\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ [0,+\infty)\end{cases}\right\}\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ g\overset{\vee}{\downarrow}[0,+\infty)$$

$$t>0\overset{g\overset{\vee}{\downarrow}[0,+\infty)}{\Longrightarrow}g(t)<g(0)\Rightarrow\eta\mu t+t-\frac{t^3}{6}<0\Rightarrow\eta\mu t<-t+\frac{t^3}{6}$$

$$\text{Α}\nu\ t=\frac{1}{x},x>0\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:\eta\mu\frac{1}{x}<-\frac{1}{x}+\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^3}{6}\Rightarrow\eta\mu\frac{1}{x}<-\frac{1}{x}+\frac{1}{6x^3}\Rightarrow$$

$$x^2\eta\mu\frac{1}{x}<x^2\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{6x^3}\right)\Rightarrow x^2\eta\mu\frac{1}{x}<-x+\frac{1}{6x}\Rightarrow e^{x^2\eta\mu\frac{1}{x}}<e^{-x+\frac{1}{6x}}\Rightarrow$$

$$e^{x^2\eta\mu\frac{1}{x}}-e^x<e^{-x+\frac{1}{6x}}-e^x\Rightarrow e^{x^2\eta\mu\frac{1}{x}}-e^x<e^x\left(e^{-x+\frac{1}{6x}-x}-1\right)\Rightarrow$$

$$e^{x^2\eta\mu\frac{1}{x}}-e^x<e^x\left(e^{-2x+\frac{1}{6x}}-1\right),x>0$$

$$\Theta\acute{\varepsilon}\tau\omega:u=-2x+\frac{1}{6x},\lim_{x\to+\infty}u=-2\lim_{x\to+\infty}x+\frac{1}{6}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{6x}=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}e^{-2x+\frac{1}{6x}}=\lim_{u\to-\infty}e^u=0$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^x\left(e^{-2x+\frac{1}{6x}}-1\right)=\lim_{x\to+\infty} e^x\left(\lim_{x\to+\infty} e^{-2x+\frac{1}{6x}}-1\right)=(+\infty)(0-1)=-\infty$$

$$\left.\begin{cases}(\mathrm{I})\, e^{x^2\eta\mu\frac{1}{x}}-e^x<e^x\left(e^{-2x+\frac{1}{6x}}-1\right), x>0\\ (\mathrm{II})\, \lim\limits_{x\to+\infty} e^x\left(e^{-2x+\frac{1}{6x}}-1\right)=-\infty\end{cases}\right\}\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon: L=\lim_{x\to+\infty}\left(e^{x^2\eta\mu\frac{1}{x}}-e^x\right)=-\infty$$

21.

$$\boxed{\mathrm{N}\alpha\ \upsilon\pi o\lambda o\gamma\iota\sigma\tau\varepsilon\acute{\iota}\ \tau o\ o\lambda o\kappa\lambda\acute{\eta}\rho\omega\mu\alpha \int_1^2 x^x(\ln x+1)\,dx, x>0}$$

$$\boxed{\theta=e^{\ln\theta},\theta>0}\ ,\ \boxed{\ln\theta^\kappa=\kappa\ln\theta,\theta>0},\ \boxed{\left(e^{f(x)}\right)'=e^{f(x)}f'(x)}$$

$$\int_1^2 x^x(\ln x+1)\,dx=\int_1^2 e^{\ln x^x}(\ln x+1)\,dx=\int_1^2 e^{x\ln x}(\ln x+1)\,dx$$

$$(x\ln x)'=(x)'\ln x+x(\ln x)'=\ln x+x\frac{1}{x}=\ln x+1$$

$$\int_1^2 x^x(\ln x+1)\,dx=\int_1^2 e^{x\ln x}(\ln x+1)\,dx\overset{(x\ln x)'=\ln x+1}{=}\int_1^2 e^{x\ln x}(x\ln x)'\,dx=$$

$$\int_1^2\left(e^{x\ln x}\right)'dx=\left[e^{x\ln x}\right]_1^2=e^{2\ln 2}-e^{\ln 1}=e^{\ln 2^2}-e^0=e^{\ln 4}-1=4-1=3$$

22.

$$\boxed{\mathrm{N}\alpha\ \varepsilon\xi\varepsilon\tau\acute{\alpha}\sigma\varepsilon\tau\varepsilon\ \alpha\nu\ \upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota\ m>0\ \acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon\ 8^x-m^x<m^x-2^x\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\neq 0}$$

Έστω υπάρχει $m\in\mathbb{R}$ *τέτοιο ώστε για κάθε* $x\neq 0$ *να ισχύει*:

$m^x-2^x>8^x-m^x \Leftrightarrow 2m^x-2^x-8^x>0$

Θ*εωρώ την συνάρτηση* $f(x)=2m^x-2^x-8^x$. Τ*ότε αν* $x\neq 0$ *θα έχω*

$f(x)>0$ *και* $f(0)=2m^0-2^0-8^0=0$. *Άρα θα ισχύει* $f(x)\geq f(0)$ *για κάθε* $x\in\mathbb{R}$. Ο*πότε η συνάρτηση* f *έχει ελάχιστο στην θέση* $x_0=0$

<u>Α*ν* $m=1$:</u> $f(x)=2-2^x-8^x$

$f'(x)=-2^x\ln 2-8^x\ln 8$

$$\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\ \text{Το } x_0=0 \text{ είναι εσωτερικό σημείο του } (-\infty,+\infty)\\ (\mathrm{II})\ \text{Η συνάρτηση } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο } x_0=0\\ (\mathrm{III})\ \text{Η συνάρτηση } f \text{ έχει ελάχιστο στην θέση } x_0=0\end{array}\right\}$$

Ο*πότε απο το θεώρημα του Fermat θα έχω*:

$f'(x_0)=0 \Leftrightarrow -2^0\ln 2-8^0\ln 8=0 \Leftrightarrow \ln 2+\ln 8=0 \Leftrightarrow \ln 16=\ln 1 \Leftrightarrow$

$16=1$ (ΑΤΟΠΟ)

<u>Α*ν* $0<m\neq 1$:</u> $f(x)=2m^x-2^x-8^x$

$f'(x)=2m^x\ln m-2^x\ln 2-8^x\ln 8$

$$\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\ \text{Το } x_0=0 \text{ είναι εσωτερικό σημείο του } (-\infty,+\infty)\\ (\mathrm{II})\ \text{Η συνάρτηση } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο } x_0=0\\ (\mathrm{III})\ \text{Η συνάρτηση } f \text{ έχει ελάχιστο στην θέση } x_0=0\end{array}\right\}$$

Ο*πότε απο το θεώρημα του Fermat θα έχω*:

$f'(x_0)=0 \Leftrightarrow 2m^0\ln m-2^0\ln 2-8^0\ln 8=0 \Leftrightarrow \ln m^2=\ln 2+\ln 8 \Leftrightarrow$

$\ln m^2=\ln 16 \Leftrightarrow m^2=16 \overset{m>0}{\Longleftrightarrow} m=\sqrt{16} \Leftrightarrow m=4$

$f(x)=2\bullet 4^x-2^x-8^x$

$\text{Αν } x \neq 0 \text{ θα έχω}:$

$$2 \cdot 4^x - 2^x - 8^x > 0 \Leftrightarrow 2 \cdot 4^x > 2^x + 8^x \Leftrightarrow \frac{2 \cdot 4^x}{4^x} > \frac{2^x}{4^x} + \frac{8^x}{4^x} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{2}{4}\right)^x + \left(\frac{8}{4}\right)^x < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2^x} + 2^x < 2 \Leftrightarrow 2^x\left(\frac{1}{2^x} + 2^x\right) < 2 \cdot 2^x \Leftrightarrow$$

$$2^x \frac{1}{2^x} + 2^x \cdot 2^x - 2 \cdot 2^x < 0 \Leftrightarrow \left(2^x\right)^2 - 2 \cdot 2^x \cdot 1 + 1^2 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(2^x - 1\right)^2 < 0 \left(\text{ΑΤΟΠΟ}\right)$$

23.

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *με* f' *για την οποία ισχύει*:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, x \leq 1 \\ \frac{1}{x} + 1, x > 1 \end{cases}$$

Δίνεται ακόμη ότι η εφαπτομένη της C_f *στο σημείο της* $\text{Μ}\left(e, f(e)\right)$ *διέρχεται απο την αρχή των αξόνων.*

Γ1. *Να αποδείξετε ότι* $f(x) = \begin{cases} x^2, x \leq 1 \\ \ln x + x, x > 1 \end{cases}$

Γ2. *Να βρείτε τον* $\lambda \in (0, +\infty)$, *αν είναι γνωστό ότι ισχύει*

$$\int_1^{\lambda} \frac{2f(x)}{x}\, dx = 2\lambda - 1$$

Γ3. *Να αποδείξετε ότι για κάθε* $x > 0$ *ισχύει* $x^2 \geq \ln x + x$. *Πότε ισχύει η ισότητα*

Γ4. *Αν γνωρίζουμε ότι η εξίσωση* $f(x) = \alpha$, *έχει δυο ρίζες αντίθετες, να βρείτε την μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει ο πραγματικός αριθμός* α.

Γ1.$\Gamma \iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in(1,+\infty)\ \acute{\varepsilon}\chi\omega\ f'(x)=(\ln x+x)'$.$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota\ c_1\in\mathbb{R}$ $\tau\acute{\varepsilon}\tau o\iota o\ \acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in(1,+\infty)\ \nu\alpha\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota$:

$f(x)=\ln x+x+c_1$

Η $(\varepsilon)\ \varepsilon\varphi\alpha\pi\tau o\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta\ \tau\eta\varsigma\ C_f\ \sigma\tau o\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o\ \tau\eta\varsigma\ \mathrm{M}(e,f(e))\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\varepsilon\iota\ \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta$:

$$y-f(e)=f'(e)(x-e)\Leftrightarrow y-1-e-c_1=\left(\frac{1}{e}+1\right)(x-e)$$

Ε$\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}$ $\mathrm{O}(0,0)\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega$:

$$0-1-e-c_1=\left(\frac{1}{e}+1\right)(0-e)\Leftrightarrow \cancel{-1-e}-c_1=\cancel{-1-e}\Leftrightarrow -c_1=0\Leftrightarrow c_1=0$$

Ο$\pi\acute{o}\tau\varepsilon$: $f(x)=\ln x+x,\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in(1,+\infty)$

$\Gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in(-\infty,1]$ έχω $f'(x)=\left(x^2\right)'$. Οπότε υπάρχει $c_2\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε για κάθε $x\in(-\infty,1]$ να ισχύει:

$f(x)=x^2+c_2$

$$f(x)=\begin{cases}x^2+c_2, x\le 1\\ \ln x+x, x>1\end{cases}$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=1$ θα είναι και συνεχής στο $x_0=1$. Άρα θα ισχύει:

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^-}f(x)=f(1)\Leftrightarrow 1^2+c_2=\ln 1+1\Leftrightarrow c_2=0$$

Οπότε: $f(x)=\begin{cases}x^2, x\le 1\\ \ln x+x, x>1\end{cases}$

Γ2. <u>Αν $0<\lambda<1$</u>

$$\int_1^{\lambda}\frac{2f(x)}{x}\,dx=2\lambda-1\Leftrightarrow -\int_{\lambda}^{1}\frac{2f(x)}{x}\,dx=2\lambda-1\Leftrightarrow -\int_{\lambda}^{1}\frac{2x^2}{x}\,dx=-(1-2\lambda)$$

$$\int_{\lambda}^{1}2x\,dx=1-2\lambda\Leftrightarrow\left[x^2\right]_{\lambda}^{1}=1-2\lambda\Leftrightarrow \cancel{1^2}-\lambda^2=\cancel{1}-2\lambda\Leftrightarrow\lambda^2-2\lambda=0$$

$$\Leftrightarrow\lambda(\lambda-2)=0\left\{\begin{pmatrix}\lambda=0\\ \text{Άτοπο γιατί}\\ 0<\lambda<1\end{pmatrix}\ \text{ή}\ \begin{pmatrix}\lambda=2\\ \text{Άτοπο γιατί}\\ 0<\lambda<1\end{pmatrix}\right\}$$

<u>Αν $\lambda=1$</u>

$$\int_1^{1}\frac{2f(x)}{x}\,dx=2\bullet 1-1\Leftrightarrow 0=1\,(\text{Άτοπο})$$

<u>Αν $\lambda>1$</u>

$$\int_1^{\lambda}\frac{2f(x)}{x}\,dx=2\lambda-1\Leftrightarrow\int_1^{\lambda}\frac{2\ln x+2x}{x}\,dx=2\lambda-1$$

$$\int_1^{\lambda}2\frac{\ln x}{x}\,dx+2\int_1^{\lambda}\frac{x}{x}\,dx=2\lambda-1\Leftrightarrow\int_1^{\lambda}2\ln x(\ln x)'\,dx+2\int_1^{\lambda}dx=2\lambda-1$$

$$\boxed{\left[G^2(x)\right]'=2G(x)G'(x)}$$

$$\int_1^{\lambda}\left(\ln^2 x\right)' dx+2\left[x\right]_1^{\lambda}=2\lambda-1 \Leftrightarrow \ln^2\lambda-\ln^2 1+2\lambda-2=2\lambda-1 \Leftrightarrow \ln^2\lambda=1 \Leftrightarrow$$

$$\left(\lambda>1 \Rightarrow \ln\lambda>\ln 1 \Rightarrow \ln\lambda>0\right) \Leftrightarrow \ln\lambda=1 \Leftrightarrow \lambda=e\left(\Delta\varepsilon\kappa\tau\acute{\eta}\ \gamma\iota\alpha\tau\acute{\iota}\ e>1\right)$$

Γ3. $\Theta\varepsilon\omega\rho\acute{\omega}\ \tau\eta\nu\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ h(x)=x^2-\ln x-x, x>0$

$$h'(x)=\left(x^2-\ln x-x\right)'=2x-\frac{1}{x}-1=\frac{2x^2-x-1}{x}=\frac{x^2-x+x^2-1}{x}=$$

$$\frac{x(x-1)+(x-1)(x+1)}{x}=\frac{(x-1)(2x+1)}{x}=\frac{2x+1}{x}(x-1)$$

$$x>0 \Rightarrow \left.\begin{cases}2x+1>0\\ x>0\end{cases}\right\} \Rightarrow \frac{2x+1}{x}>0$$

$$\left.\begin{cases}h'(x)\ge 0\\ x>0\end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases}x-1\ge 0\\ x>0\end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases}x\ge 1\\ x>0\end{cases}\right\} \Leftrightarrow x\ge 1$$

$$\left.\begin{cases}(\mathrm{I})\, h'(x)<0\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in(0,1)\\ (\mathrm{II})\ \mathrm{H}\ h\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ (0,1]\end{cases}\right\} \text{Άρα } h\overset{\vee}{\downarrow}(0,1]$$

$$\mathrm{A}\nu\ x\in(0,1) \Rightarrow x<1 \xRightarrow{h\overset{\vee}{\downarrow}(0,1]} h(x)>h(1) \Rightarrow x^2-\ln x-x>0 \Rightarrow x^2>\ln x+x$$

$$\left.\begin{cases}(\mathrm{I})\, h'(x)>0\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in(1,+\infty)\\ (\mathrm{II})\ \mathrm{H}\ h\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ [1,+\infty)\end{cases}\right\} \text{Άρα } h\underset{\wedge}{\uparrow}[1,+\infty)$$

$$\mathrm{A}\nu\ x\in(1,+\infty) \Rightarrow x>1 \xRightarrow{h\underset{\wedge}{\uparrow}[1,+\infty)} h(x)>h(1) \Rightarrow x^2-\ln x-x>0 \Rightarrow x^2>\ln x+x$$

$\mathrm{A}\nu\ x=1: h(1)=1^2-\ln 1-1=0$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon: x^2>\ln x+x, x\in(0,1)\cup(1,+\infty)>0$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon: x^2=\ln x+x \Leftrightarrow x=1$

Γ4. Η $\varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta\ f(x)=\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\varepsilon\iota\ \delta\upsilon o\ \rho\acute{\iota}\zeta\varepsilon\varsigma\ \alpha\nu\tau\acute{\iota}\theta\varepsilon\tau\varepsilon\varsigma$. Τότε $\theta\alpha$

$\acute{\varepsilon}\chi\omega\ x_1+x_2=0, x_1\ne x_2\ \mu\varepsilon\ f(x_1)=f(x_2)=\alpha$. Έστω $x_1=0$.

Τότε $\theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega\ x_1+x_2=0 \Leftrightarrow 0+x_2=0 \Leftrightarrow x_1=x_2=0$ (Άτοπο)

Χωρίς βλάβη γενικότητας υποθέτω ότι $x_1>0$. Τότε θα έχω $x_2=-x_1$

<u>Αν $0<x_1\le 1$</u>

$f(x_1)=x_1^2\le 1$

$x_1 > 0 \Rightarrow -x_1 < 0 \Rightarrow f(-x_1) = (-x_1)^2 = {x_1}^2 \le 1 \Rightarrow f(x_2) \le 1$

Οπότε : $f(x_1) = f(x_2) \le 1$

<u>Αν $x_1 > 1$</u>

$f(x_1) = \ln x_1 + x_1$

$x_1 > 1 > 0 \Rightarrow x_1 > 0 \Rightarrow -x_1 < 0 \Rightarrow f(-x_1) = (-x_1)^2 = {x_1}^2 \Rightarrow f(x_2) = {x_1}^2$

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \ln x_1 + x_1 = {x_1}^2 \overset{\text{Απο ερώτημα Γ3}}{\Longrightarrow} x_1 = 1(\text{Άτοπο})$

Οπότε η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει ο πραγματικός αριθμός α έτσι εξίσωση $f(x) = \alpha$, έχει δυο ρίζες αντίθετες είναι $\alpha = 1$.

24.

Δίνεται η συνάρτηση $f : \Delta = [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *και για κάθε* $x \in \Delta$ *ισχύει* $f^3(x) + f^2(x) + f(x) = x^3$ Α.(α_1) Ν.δ.ο $f \underset{\wedge}{\uparrow} \Delta$ (α_2) *Να βρείτε το* $f(\Delta)$ Β. *Να βρείτε, αν υπάρχει το* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ Γ. Ν.δ.ο *η* f *είναι παραγωγίσιμη στο* Δ *και στη συνέχεια να υπολογίσετε το* $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x)$.

$\text{Α.}(\alpha_1)\ \Theta\varepsilon\omega\rho\acute{\omega}\ \tau\iota\varsigma\ \sigma\upsilon\nu\alpha\rho\tau\acute{\eta}\sigma\varepsilon\iota\varsigma\ g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=x^3+x^2+x\ \kappa\alpha\iota$

$h:[0,+\infty)\to\mathbb{R}, h(x)=x^3.\ \text{Τ}\acute{o}\tau\varepsilon\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega\ g(f(x))=h(x)$

$g'(x)=(x^3+x^2+x)'=3x^2+2x+1>0$

$x\ge 0\Rightarrow\left\{\begin{matrix}3x^2\ge 0\\ 2x\ge 0\end{matrix}\right\}\Rightarrow 3x^2+2x\ge 0\Rightarrow 3x^2+2x+1\ge 1>0\Rightarrow g'(x)>0$

$\text{Ε}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ g'(x)>0\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in[0,+\infty)\ \pi\rho o\kappa\acute{\upsilon}\pi\tau\varepsilon\iota\ o\tau\iota\ g\underset{\wedge}{\uparrow}[0,+\infty)$

$\text{Α}\nu: x_1<x_2\Rightarrow x_1^{\ 3}<x_2^{\ 3}\Rightarrow h(x_1)<h(x_2).\ \text{Ά}\rho\alpha\ h\underset{\wedge}{\uparrow}[0,+\infty)$

$\text{Α}\nu\left\{\begin{matrix}x_1<x_2\\ x_1,x_2\in[0,+\infty)\end{matrix}\right\}\overset{h\underset{\wedge}{\uparrow}[0,+\infty)}{\Longrightarrow}h(x_1)<h(x_2)\Rightarrow g(f(x_1))<g(f(x_2))$

$\overset{g\underset{\wedge}{\uparrow}[0,+\infty)}{\Longrightarrow}f(x_1)<f(x_2).\Sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\acute{\omega}\varsigma\ f\underset{\wedge}{\uparrow}[0,+\infty)$

$(a_2)\ f^3(0)+f^2(0)+f(0)=0^3\Rightarrow f(0)\left[f^2(0)+f(0)+1\right]=0\Rightarrow f(0)=0$

$\left(\begin{matrix}\Theta\varepsilon\omega\rho\acute{\omega}\ \tau o\ \tau\rho\iota\acute{\omega}\nu\upsilon\mu o\ t^2+t+1.\ \text{Ε}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ \ \Delta=-3<0\ \kappa\alpha\iota\ \alpha=1>0\ \theta\alpha\\ \acute{\varepsilon}\chi\omega\ t^2+t+1\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ t\in\mathbb{R}\end{matrix}\right)$

$x\ge 0\overset{f\underset{\wedge}{\uparrow}[0,+\infty)}{\Longrightarrow}f(x)\ge f(0)\Rightarrow f(x)\ge 0.\ \Sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\acute{\omega}\varsigma\ f(\Delta)\subseteq[0,+\infty)$

$\text{Α}\nu\ \theta\ge 0\ \kappa\alpha\iota\ g(\theta)=x_0, x_0\ge 0$

$$g\left(f\left(\sqrt[3]{x_0}\right)\right)=\left(\sqrt[3]{x_0}\right)^3\Rightarrow g\left(f\left(\sqrt[3]{x_0}\right)\right)=x_0=g(\theta)\Rightarrow g\left(f\left(\sqrt[3]{x_0}\right)\right)=g(\theta)$$

$$\overset{g\uparrow[0,+\infty)}{\Longrightarrow} f\left(\sqrt[3]{x_0}\right)=\theta$$

Οπότε για κάθε $\theta\in[0,+\infty)$ υπάρχει $x_0\in[0,+\infty)$ με $f\left(\sqrt[3]{x_0}\right)=\theta$

Οπότε $[0,+\infty)\subseteq f(\Delta)$. Επειδή $f(\Delta)\subseteq[0,+\infty)$ και $[0,+\infty)\subseteq f(\Delta)$ έχω $f(\Delta)=[0,+\infty)$

B. $\left.\begin{cases} f^2(x)\geq 0 \\ f(x)\geq 0\end{cases}\right\}\Rightarrow f^2(x)+f(x)\geq 0\Rightarrow f^3(x)+f^2(x)+f(x)\geq f^3(x)\Rightarrow$

$$f^3(x)\leq f^3(x)+f^2(x)+f(x)=x^3\Rightarrow f^3(x)\leq x^3\Rightarrow f(x)\leq x$$

Αν $x>0\Rightarrow f^3(x)+f^2(x)+f(x)=x^3\Rightarrow \dfrac{f^3(x)+f^2(x)+f(x)}{x^3}=\dfrac{x^3}{x^3}=1\Rightarrow$

$$\left[\frac{f(x)}{x}\right]^3-1+\left[\frac{1}{x}\frac{f^2(x)}{x^2}+\frac{1}{x^2}\frac{f(x)}{x}\right]=0\Rightarrow$$

$$\left[\frac{f(x)}{x}-1\right]\left[\frac{f^2(x)}{x^2}+\frac{f(x)}{x}+1\right]=-\left[\frac{1}{x}\frac{f^2(x)}{x^2}+\frac{1}{x^2}\frac{f(x)}{x}\right]\Rightarrow$$

$$\left|\frac{f(x)}{x}-1\right|\left|\frac{f^2(x)}{x^2}+\frac{f(x)}{x}+1\right|=\left|-\left[\frac{1}{x}\frac{f^2(x)}{x^2}+\frac{1}{x^2}\frac{f(x)}{x}\right]\right|\Rightarrow$$

$$\left|\frac{f(x)}{x}-1\right|\left[\frac{f^2(x)}{x^2}+\frac{f(x)}{x}+1\right]=\left|\frac{1}{x}\frac{f^2(x)}{x^2}+\frac{1}{x^2}\frac{f(x)}{x}\right|$$

$$x>0\overset{f\uparrow[0,+\infty)}{\Longrightarrow} f(x)>f(0)\Rightarrow f(x)>0\Rightarrow \frac{f^2(x)}{x^2}+\frac{f(x)}{x}>0\Rightarrow$$

$$\frac{f^2(x)}{x^2}+\frac{f(x)}{x}+1>1\Rightarrow \frac{1}{\dfrac{f^2(x)}{x^2}+\dfrac{f(x)}{x}+1}<1$$

$$x>0\Rightarrow f(x)>0\Rightarrow \frac{1}{x}\frac{f^2(x)}{x^2}+\frac{1}{x^2}\frac{f(x)}{x}>0$$

$\Sigma \upsilon \nu \varepsilon \pi \acute{\omega} \varsigma \ \theta \alpha \ \iota \sigma \chi \acute{\upsilon} \varepsilon \iota :\left|\frac{f(x)}{x}-1\right|\left[\frac{f^2(x)}{x^2}+\frac{f(x)}{x}+1\right]=\frac{1}{x}\frac{f^2(x)}{x^2}+\frac{1}{x^2}\frac{f(x)}{x}\Rightarrow$

$$\left|\frac{f(x)}{x}-1\right|=\frac{\frac{1}{x}\frac{f^2(x)}{x^2}+\frac{1}{x^2}\frac{f(x)}{x}}{\frac{f^2(x)}{x^2}+\frac{f(x)}{x}+1}$$

$$f(x)\le x \overset{f(x),x>0}{\Longrightarrow} \frac{f(x)}{x}\le 1\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\frac{f(x)}{x}\le 1\\ \frac{f^2(x)}{x^2}\le 1\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{x^2}\frac{f(x)}{x}\le\frac{1}{x^2}\\ \frac{1}{x}\frac{f^2(x)}{x^2}\le\frac{1}{x}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\frac{1}{x^2}\frac{f(x)}{x}+\frac{1}{x}\frac{f^2(x)}{x^2}\le\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{x^2}\frac{f(x)}{x}+\frac{1}{x}\frac{f^2(x)}{x^2}\le\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\\ \frac{1}{\frac{f^2(x)}{x^2}+\frac{f(x)}{x}+1}<1\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{\frac{1}{x}\frac{f^2(x)}{x^2}+\frac{1}{x^2}\frac{f(x)}{x}}{\frac{f^2(x)}{x^2}+\frac{f(x)}{x}+1}\le\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\Rightarrow$$

$$\left|\frac{f(x)}{x}-1\right|\le\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\Rightarrow-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\le\frac{f(x)}{x}-1\le\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\Rightarrow$$

$$-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)+1\le\frac{f(x)}{x}\le 1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2},x>0(1)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)+1\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right]=1(2)$$

$\mathrm{A}\pi o \ \tau\iota\varsigma \ \sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\varepsilon\iota\varsigma \ (1),(2) \ \alpha\pi o \ \tau o \ \kappa\rho\iota\tau\acute{\eta}\rho\iota o \ \tau\eta\varsigma \ \pi\alpha\rho\varepsilon\mu\beta o\lambda\acute{\eta}\varsigma \ \theta\alpha \ \acute{\varepsilon}\chi\omega$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$$

Γ. <u>$\Theta\alpha \ \alpha\pi o\delta\varepsilon\acute{\iota}\xi\omega \ o\tau\iota \ \eta \ f \ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota \ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma$</u>

$$\left\{\begin{array}{l}f^3(x)+f^2(x)+f(x)=x^3\\ f^3(x_0)+f^2(x_0)+f(x_0)=x_0^{\,3}\end{array}\right\}\overset{(-)}{\Longrightarrow}$$

$$f^3(x)-f^3(x_0)+f^2(x)-f^2(x_0)+f(x)-f(x_0)=x^3-{x_0}^3$$
$$\left[f(x)-f(x_0)\right]\left[f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x)\right]+$$
$$\left[f(x)-f(x_0)\right]\left[f(x)+f(x_0)\right]+f(x)-f(x_0)=x^3-{x_0}^3\Rightarrow$$
$$\left|f(x)-f(x_0)\right|\left|f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x)+f(x)+f(x_0)+1\right|=\left|x^3-{x_0}^3\right|\Rightarrow$$
$$\text{Έχω}: f^2(x), f(x)f(x_0), f^2(x), f(x), f(x_0)\geq 0\Rightarrow$$
$$f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x)+f(x)+f(x_0)\geq 0\Rightarrow$$
$$f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x)+f(x)+f(x_0)+1\geq 1>0$$
$$\Rightarrow f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x)+f(x)+f(x_0)+1>0$$
$$\text{Οπότε}: \left|f(x)-f(x_0)\right|=\frac{\left|x^3-{x_0}^3\right|}{f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x)+f(x)+f(x_0)+1}$$
$$\text{Έχω}: f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x)+f(x)+f(x_0)+1\geq 1$$
$$\frac{1}{f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x)+f(x)+f(x_0)+1}\leq 1\Rightarrow$$
$$\frac{\left|x^3-{x_0}^3\right|}{f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x)+f(x)+f(x_0)+1}\leq\left|x^3-{x_0}^3\right|\Rightarrow$$
$$\left|f(x)-f(x_0)\right|\leq\left|x^3-{x_0}^3\right|\Rightarrow-\left|x^3-{x_0}^3\right|\leq f(x)-f(x_0)\leq\left|x^3-{x_0}^3\right|\Rightarrow$$
$$-\left|x^3-{x_0}^3\right|+f(x_0)\leq f(x)\leq f(x_0)+\left|x^3-{x_0}^3\right|(3)$$
$$\lim_{x\to x_0}\left[-\left|x^3-{x_0}^3\right|+f(x_0)\right]=\lim_{x\to x_0}\left[\left|x^3-{x_0}^3\right|+f(x_0)\right]=f(x_0)(3)$$
$\text{Απο τις σχέσεις } (3),(4) \text{ και απο το κριτήριο της παρεμβολής θα}$
$\text{έχω } \lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

$\text{Αν } x\neq x_0:$
$$\left[f(x)-f(x_0)\right]\left[f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x)+f(x)+f(x_0)+1\right]=x^3-{x_0}^3\Rightarrow$$
$$\left[f(x)-f(x_0)\right]\left[f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x)+f(x)+f(x_0)+1\right]=$$
$$(x-x_0)\left(x^2+xx_0+{x_0}^2\right)\Rightarrow$$
$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x^2+xx_0+{x_0}^2}{f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x)+f(x)+f(x_0)+1}\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x^2+xx_0+x_0{}^2}{f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x)+f(x)+f(x_0)+1}=$$

$$\frac{3x_0{}^2}{3f^2(x_0)+2f^2(x_0)+1}$$

$$\text{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon: f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{3x_0{}^2}{3f^2(x_0)+2f(x_0)+1}$$

$$f'(x)=\frac{3x^2}{3f^2(x)+2f(x)+1}=\frac{\frac{3x^2}{x^2}}{\frac{3f^2(x)+2f(x)+1}{x^2}}=$$

$$=\frac{3}{3\left[\frac{f(x)}{x}\right]^2+2\frac{1}{x}\frac{f(x)}{x}+\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\frac{3}{3\left[\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}\right]^2+2\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}}=\frac{3}{3+0+0}=1$$

25.

Έστω οι παραγωγίσιμες στο $\Delta=(-\alpha,\alpha)$ συναρτήσεις f,g,h ώστε $f(x)=g(x)h(x)$, $g(x)>0$ και $1+g(2x)=2g^2(x)$, με $x\in\Delta$. Να αποδείξετε οι C_f, C_h έχουν κοινό σημείο στον άξονα y'y στο οποίο διέρχεται κοινή εφαπτόμενη ευθεία

$\Theta\acute{\varepsilon}\tau\omega\; x=0\; \sigma\tau\eta\nu\; \sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\eta\; 1+g\left(2x\right)=2g^{2}\left(x\right)$:

$$1+g\left(0\right)=2g^{2}\left(0\right)\Leftrightarrow g^{2}\left(0\right)-g\left(0\right)+g^{2}\left(0\right)-1=0\Leftrightarrow$$

$$g\left(0\right)\left[g\left(0\right)-1\right]+\left[g\left(0\right)-1\right]\left[g\left(0\right)+1\right]=0\Leftrightarrow\left[g\left(0\right)-1\right]\left[2g\left(0\right)+1\right]=0\Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{matrix} g\left(0\right)=1 \\ \acute{\eta} \\ g\left(0\right)=-\dfrac{1}{2} \\ \left(\acute{A}\tau o\pi o\; \gamma\iota\alpha\tau\acute{\iota}\; g\left(0\right)>0\right)\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow g\left(0\right)=1$$

$\Theta\acute{\varepsilon}\tau\omega\; x=0\; \sigma\tau\eta\nu\; \sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\eta\; f\left(x\right)=g\left(x\right)h\left(x\right)$:

$$f\left(0\right)=g\left(0\right)h\left(0\right)\overset{g(0)=1}{\Longleftrightarrow} f\left(0\right)=1\bullet h\left(0\right)\Leftrightarrow f\left(0\right)=h\left(0\right)$$

Άρα οι C_f, C_h *έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο πάνω στον άξονα* $y'y$ *το* $\left(f\left(0\right),0\right)\equiv\left(h\left(0\right),0\right)$. *Έστω* $\left(\varepsilon_1\right),\left(\varepsilon_2\right)$ *οι εφαπτομένες της* C_f, C_h *αντίστοιχαστα σημεία* $\left(f\left(0\right),0\right)$ *και* $\left(h\left(0\right),0\right)$. Τ*ότε θα έχω*:

$$\lambda_{\varepsilon_1}=f'\left(0\right),\; \lambda_{\varepsilon_2}=h'\left(0\right)$$

$$1+g\left(2x\right)=2g^{2}\left(x\right)\Rightarrow\left[1+g\left(2x\right)\right]'=\left[2g^{2}\left(x\right)\right]'\Rightarrow 2g'\left(2x\right)=4g\left(x\right)g'\left(x\right)\Rightarrow$$

$$\cancel{2}g'\left(2x\right)=\cancel{2}\bullet 2g\left(x\right)g'\left(x\right)\Rightarrow g'\left(2x\right)=2g\left(x\right)g'\left(x\right)$$

$\Theta\acute{\varepsilon}\tau\omega\; x=0\; \sigma\tau\eta\nu\; \sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\eta\; g'\left(2x\right)=2g\left(x\right)g'\left(x\right)$:

$$g'\left(0\right)=2g\left(0\right)g'\left(0\right)\overset{g(0)=1}{\Longleftrightarrow} g'\left(0\right)=2\bullet 1\bullet g'\left(0\right)\Leftrightarrow 2g'\left(0\right)=g'\left(0\right)\Leftrightarrow g'\left(0\right)=0$$

$$f\left(x\right)=g\left(x\right)h\left(x\right)\Rightarrow f'\left(x\right)=g'\left(x\right)h\left(x\right)+g\left(x\right)h'\left(x\right)\overset{\Theta\acute{\varepsilon}\tau\omega\; x=0:}{\Longrightarrow}$$

$$f'(0)=g'(0)h(0)+g(0)h'(0)\overset{\substack{g'(0)=0\\ g(0)=1}}{\Longrightarrow} f'(0)=0\bullet h(0)+1\bullet h'(0)\Rightarrow f'(0)=h'(0)$$

$\Rightarrow \lambda_{\varepsilon_1}=\lambda_{\varepsilon_2}$

Επειδή οι ευθείες $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο και ίσους συντελεστές διευθυνσης ταυτίζονται.

26.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha e^{x^2}-x^2-1,\ \alpha\in\mathbb{R}$ *, για την οποία ισχύει* :

$\eta\mu\left(f'(0)-f(0)\right)=f'(0)-f(0)$

α. Να *αποδείξετε ότι* $\alpha=1$

β. Να *μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.*

γ. Να *μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα*

δ. Θ*εωρούμε μια συνεχή και περιττή συνάρτηση* $g:[-1,1]\to\mathbb{R}$.

Να *αποδείξετε ότι* $\int_{-1}^{1}\left(g(x)+\dfrac{x^2}{f(x)+1}\right)dx<\dfrac{2}{3}$

$\alpha.\ f(x)=\alpha e^{x^2}-x^2-1,\ f'(x)=2\alpha x e^{x^2}-2x$

$\boxed{|\eta\mu x|=|x|\Leftrightarrow x=0}$

$\eta\mu\left(f'(0)-f(0)\right)=f'(0)-f(0)\Rightarrow\left|\eta\mu\left(f'(0)-f(0)\right)\right|=\left|f'(0)-f(0)\right|\Leftrightarrow$

$f'(0)-f(0)=0\Leftrightarrow f'(0)=f(0)\Leftrightarrow \alpha e^0-0^2-1=0\Leftrightarrow a=1$

$\beta.\ f(x)=e^{x^2}-x^2-1,\ f'(x)=2xe^{x^2}-2x=2x\left(e^{x^2}-1\right)$

Αν $x\neq 0\Rightarrow x^2>0\Rightarrow e^{x^2}>e^0\Rightarrow e^{x^2}-1>0$

Αν $x<0\Rightarrow\left.\begin{cases}2x<0\\ e^{x^2}-1>0\end{cases}\right\}\Rightarrow 2x\left(e^{x^2}-1\right)<0\Rightarrow f'(x)<0$

Αν $x>0\Rightarrow\left.\begin{cases}2x>0\\ e^{x^2}-1>0\end{cases}\right\}\Rightarrow 2x\left(e^{x^2}-1\right)>0\Rightarrow f'(x)>0$

$Έχω:\left.\begin{cases}(\mathrm{I})\ \text{Η}\ f\ \textit{είναι συνεχής στο}\ (-\infty,0]\\ (\mathrm{II})\ f'(x)<0\ \textit{για κάθε}\ x\in(-\infty,0)\end{cases}\right\}\ \text{Ο}\textit{πότε}\ f\overset{\vee}{\downarrow}(-\infty,0]$

$Έχω:\left.\begin{cases}(\mathrm{I})\ \text{Η}\ f\ \textit{είναι συνεχής στο}\ [0,+\infty)\\ (\mathrm{II})\ f'(x)>0\ \textit{για κάθε}\ x\in(0,+\infty)\end{cases}\right\}\ \text{Ο}\textit{πότε}\ f\underset{\wedge}{\uparrow}[0,+\infty)$

$$\textit{Έχω}:\left\{\begin{matrix}(\mathrm{I})\ f'(x)<0\ \textit{για κάθε}\ x\in(-\infty,0)\\ (\mathrm{III})\,\mathrm{H}\ f\ \textit{είναι συνεχής στην θέση}\ x_0=0\\ (\mathrm{II})\ f'(x)>0\ \textit{για κάθε}\ x\in(0,+\infty)\end{matrix}\right\}$$

Ο*πότε η* f *παρουσιάζει ελάχιστο στην θέση* $x_0=0$ *τον αριθμό* $f(0)=0$

$\gamma.\ f''(x)=2(x)'\left(e^{x^2}-1\right)+2x\left(e^{x^2}-1\right)'=2\left(e^{x^2}-1\right)+2x\bullet 2xe^{x^2}=$

$2\left(e^{x^2}-1+2x^2e^{x^2}\right)$

$$\mathrm{A}\nu\ x\neq 0\Rightarrow x^2>0\Rightarrow\left\{\begin{matrix}e^{x^2}>e^0\\ 2x^2e^{x^2}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}e^{x^2}-1>0\\ 2x^2e^{x^2}\end{matrix}\right\}\Rightarrow f''(x)>0$$

Θ*εωρώ την συνάρτηση* $h(x)=f'(x)$. Τ*ότε θα έχω*:

$$\textit{Έχω}:\left\{\begin{matrix}(\mathrm{I})\ h'(x)>0\ \textit{για κάθε}\ x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)\\ (\mathrm{III})\,\mathrm{H}\ h\ \textit{είναι συνεχής στην θέση}\ x_0=0\end{matrix}\right\}\mathrm{O}\textit{πότε}\ h\underset{\wedge}{\uparrow}\mathbb{R}$$

Σ*ύνεπώς* $f'\underset{\wedge}{\uparrow}\mathbb{R}$. *Άρα η* f *είναι κυρτή στο* $\mathbb{R}$

$$\delta.\ \int_{-1}^{1}\left(g(x)+\frac{x^2}{f(x)+1}\right)dx=\int_{-1}^{1}g(x)dx+\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{f(x)+1}dx$$

Γ*ια ολοκλήρωμα* $\mathrm{I}=\int_{-1}^{1}g(x)dx$ *θεωρώ την αντικατάσταση* $x=-t$

$\mathrm{A}\nu\ x=1:-t=1\Leftrightarrow t=-1$

$\mathrm{A}\nu\ x=-1:-t=-1\Leftrightarrow t=1$

$dx=-dt$

Ε*πειδή συνάρτηση η* $g:[-1,1]\to\mathbb{R}$ *είναι περιττή θα ισχύει*:

$g(-t)=-g(t)$ *για κάθε* $t\in[-1,1]$

$$\mathrm{I}=\int_{-1}^{1}g(x)dx=\int_{1}^{-1}g(-t)(-dt)=\int_{1}^{-1}(-g(t))(-dt)=\int_{1}^{-1}g(t)dt=-\int_{-1}^{1}g(t)dt=$$

$$-\int_{-1}^{1}g(x)dx=-\mathrm{I}$$

$$\text{Οπότε}: \mathrm{I} = -\mathrm{I} \Leftrightarrow 2\mathrm{I} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{I} = 0$$

$$\text{Άρα}: \int_{-1}^{1}\left(g(x)+\frac{x^2}{f(x)+1}\right)dx = \int_{-1}^{1}\frac{x^2}{f(x)+1}dx$$

$$\boxed{\text{Αν } x \neq 0 \text{ έχω } e^x > x+1}$$

$$\text{Αν } x \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 0 \Rightarrow e^{x^2} > x^2+1 \Rightarrow e^{x^2}-x^2-1>0 \Rightarrow f(x)>0 \Rightarrow$$

$$f(x)+1>0 \Rightarrow \frac{1}{f(x)+1}<1 \overset{x\neq 0 \Rightarrow x^2>0}{\Longrightarrow} \frac{x^2}{f(x)+1}<x^2$$

$$\text{Επειδή } \frac{x^2}{f(x)+1}<x^2 \text{ για } x\neq 0 \text{ θα έχω}:$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{f(x)+1}dx < \int_{-1}^{1}x^2dx \Rightarrow \int_{-1}^{1}\frac{x^2}{f(x)+1}dx < \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} \Rightarrow \int_{-1}^{1}\frac{x^2}{f(x)+1}dx < \frac{1^3}{3}-\frac{(-1)^3}{3}$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1}\frac{x^2}{f(x)+1}dx < \frac{2}{3}$$

27.

Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης:

$$2^{2x}+3^{2x}+2^{x+1}3^x = 2^{3x}+2^{2x}3^x$$

$$2^{2x}+3^{2x}+2^{x+1}3^{x}=2^{3x}+2^{2x}3^{x}\Leftrightarrow\underbrace{\left(2^{x}\right)^{2}+\left(3^{x}\right)^{2}+2\bullet2^{x}\bullet3^{x}}_{\alpha^{2}+\beta^{2}+2\alpha\beta=(\alpha+\beta)^{2}}-2^{3x}-2^{2x}3^{x}=0$$

$$\overset{2^{3x}=2^{x}2^{2x}}{\Longleftrightarrow}\left(2^{x}+3^{x}\right)^{2}-2^{x}2^{2x}-2^{2x}3^{x}=0\Leftrightarrow\left(2^{x}+3^{x}\right)^{2}-2^{2x}\left(2^{x}+3^{x}\right)=0$$

$$\left(2^{x}+3^{x}\right)\left(2^{x}+3^{x}-2^{2x}\right)=0\Leftrightarrow2^{x}+3^{x}-2^{2x}=0\Leftrightarrow2^{x}+3^{x}=\left(2^{2}\right)^{x}\Leftrightarrow$$

$$\left[\left.\begin{cases}2^{x}>0\\3^{x}>0\end{cases}\right\}\Rightarrow2^{x}+3^{x}>0\Rightarrow2^{x}+3^{x}\neq0\right]$$

$$2^{x}+3^{x}=4^{x}\overset{\substack{\text{Διαιρώ και τα δυο μέλη της}\\ \text{εξίσωσης με το } 4^{x},\ 4^{x}\neq0}}{\Longleftrightarrow}\frac{2^{x}+3^{x}}{4^{x}}=\frac{4^{x}}{4^{x}}\Leftrightarrow\frac{2^{x}}{4^{x}}+\frac{3^{x}}{4^{x}}=1\Leftrightarrow\left(\frac{2:2}{4:2}\right)^{x}+\left(\frac{3}{4}\right)^{x}=1$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^{x}+\left(\frac{3}{4}\right)^{x}=1$$

Θεωρώ την συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *με τύπο* $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}+\left(\frac{3}{4}\right)^{x}$

$$f'(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\ln\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{4}\right)^{x}\ln\frac{3}{4}<0$$

$$\left\{\begin{matrix} 0<\frac{1}{2}<1 \\ 0<\frac{3}{4}<1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \ln\frac{1}{2}<0 \\ \ln\frac{3}{4}<0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \left(\frac{1}{2}\right)^x \ln\frac{1}{2}<0 \\ \left(\frac{3}{4}\right)^x \ln\frac{3}{4}<0 \end{matrix}\right\} \overset{(+)}{\Longrightarrow} \left(\frac{1}{2}\right)^x \ln\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{4}\right)^x \ln\frac{3}{4}<0$$

$\Rightarrow f'(x)<0.$ *Συνεπώς* $f \overset{\vee}{\downarrow} (-\infty,+\infty)$

$$\textit{Έχω}: \left\{\begin{matrix} (\mathrm{I})\ \text{Η } f \textit{ είναι συνεχής στο } (-\infty,+\infty) \textit{ ως πράξεις συνεχών} \\ \textit{συναρτήσεων} \\ (\mathrm{II})\ f \overset{\vee}{\downarrow} (-\infty,+\infty) \end{matrix}\right\}$$

$$\text{Ο}\textit{πότε}: f(-\infty,+\infty)=\left(\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to-\infty} f(x)\right)=(0,+\infty)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x+\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^x=0,\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x+\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^x=+\infty$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \alpha^x=\begin{cases} 0, 0<\alpha<1 \\ +\infty, \alpha>1 \end{cases}} \quad \boxed{\lim_{x\to-\infty} \alpha^x=\begin{cases} +\infty, 0<\alpha<1 \\ 0, \alpha>1 \end{cases}}$$

Ε*πειδή* $f(-\infty,+\infty)=(0,+\infty)$ *με* $f \overset{\vee}{\downarrow} (-\infty,+\infty)$ *και* $1\in(0,+\infty)$ *υπάρχει μοναδικό* $x_0 \in \mathbb{R}$ *με* $f(x_0)=1$

28.

Μ*ια συνάρτηση* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *είναι δυο φορές παραγωγίσιμη παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο* 1, *η γραφική παράσταση περνάει απο την αρχή των αξόνων και έχει την ιδιότητα* $f\left(f'(x)\right)\geq(x-1)^2$ *για κάθε* $x\in\mathbb{R}$ Ν*α αποδείξετε ότι* $f''(1)=0$

Επειδή η γραφική παράσταση περνάει απο την αρχή των αξόνων θα έχω $f(0)=0$

$$\left.\begin{cases}(\mathrm{I})\ \text{Το } x_0=1 \text{ είναι εσωτερικό σημείο του } (-\infty,+\infty)\\(\mathrm{II})\ \text{Η θέση } x_0=1 \text{ είναι θέση τοπικού ακρότατου}\\(\mathrm{III})\ \text{Η συνάρτηση } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στην θέση } x_0=1\end{cases}\right\}$$

Οπότε απο το θεώρημα του Fermat θα έχω $f'(1)=0$

$f\left(f'(x)\right)\geq(x-1)^2 \Leftrightarrow f\left(f'(x)\right)-(x-1)^2\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Θεωρώ την συνάρτηση $g(x)=f\left(f'(x)\right)-(x-1)^2$

Έχω: $g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Έχω: $g(1)=f\left(f'(1)\right)-(1-1)^2=f(0)=0$

Οπότε $g(x)\geq g(1)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα η g έχει ελάχιστο στην θέση $x_0=1$

Έχω $g'(x)=f'\left(f'(x)\right)f''(x)-(x-1)^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

$$\left.\begin{cases}(\mathrm{I})\ \text{Το } x_0=1 \text{ είναι εσωτερικό σημείο του } (-\infty,+\infty)\\(\mathrm{II})\ \text{Η θέση } x_0=1 \text{ είναι θέση ακροτάτου}\\(\mathrm{III})\ \text{Η συνάρτηση } g \text{ είναι παραγωγίσιμη στην θέση } x_0=1\end{cases}\right\}$$

Οπότε απο το θεώρημα του Fermat θα έχω $g'(1)=0$

$g'(1)=0\Leftrightarrow f'\left(f'(1)\right)f''(1)=0\Leftrightarrow f'(0)\,f''(1)=0\Leftrightarrow$

Έστω $f'(0)=0$. Θέτω $x=0$ στην σχέση $f\left(f'(x)\right)\geq(x-1)^2$

$f\left(f'(0)\right)\geq(0-1)^2\Leftrightarrow f(0)\geq(0-1)^2\Leftrightarrow 0\geq 1$ (Άτοπο)

Άρα $f''(1)=0$

29.

Να βρεθεί το $\mathrm{I}=\int_{-1}^{0}\eta\mu(x+1)^2dx+\int_{-1}^{-2}\eta\mu(x+1)^2dx$

<u>$\Gamma\iota\alpha\ \tau o\ o\lambda o\kappa\lambda\acute{\eta}\rho\omega\mu\alpha\ \int_{-1}^{0}\eta\mu\left(x+1\right)^2dx$</u>

$\Theta\acute{\varepsilon}\tau\omega\ t=x+1$

$x=-1:t=-1+1\Leftrightarrow t=0,\ x=0:t=0+1\Leftrightarrow t=1, dt=dx$

$$\int_{-1}^{0}\eta\mu\left(x+1\right)^2dx=\int_{0}^{1}\eta\mu t^2dt=\int_{0}^{1}\eta\mu x^2dx$$

<u>$\Gamma\iota\alpha\ \tau o\ o\lambda o\kappa\lambda\acute{\eta}\rho\omega\mu\alpha\ \int_{-1}^{-2}\eta\mu\left(x+1\right)^2dx$</u>

$\Theta\acute{\varepsilon}\tau\omega\ z=x+1$

$x=-1:z=-1+1\Leftrightarrow z=0,\ z=-2:z=-2+1\Leftrightarrow z=-1, dz=dx$

$$\int_{-1}^{-2}\eta\mu\left(x+1\right)^2dx=\int_{0}^{-1}\eta\mu z^2dz=\int_{0}^{-1}\eta\mu x^2dx$$

$\Theta\acute{\varepsilon}\tau\omega: x=-u$

$x=0:0=-u\Leftrightarrow u=0,\ x=-1:-1=-u\Leftrightarrow u=1, dx=-du$

$$\int_{0}^{-1}\eta\mu x^2dx=\int_{0}^{1}\eta\mu u^2\left(-du\right)=-\int_{0}^{1}\eta\mu u^2du=-\int_{0}^{1}\eta\mu x^2dx$$

$$\mathrm{I}=\int_{-1}^{0}\eta\mu\left(x+1\right)^2dx+\int_{-1}^{-2}\eta\mu\left(x+1\right)^2dx=\int_{0}^{1}\eta\mu x^2dx-\int_{0}^{1}\eta\mu x^2dx=0$$

30.

Έστω η συνάρτηση $f\left(x\right)=\dfrac{x^3-4x+3}{x^2+4}-\alpha x+\beta$ *να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί* α,β *αν το* $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f\left(x\right)=2$

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=2$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}: x^2+4\neq 0\}$

$\Gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in\mathbb{R}\ \acute{\varepsilon}\chi\omega: x^2\geq 0\Rightarrow x^2+4\geq 4>4>0\Rightarrow x^2+4>0\Rightarrow x^2+4\neq 0$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ D_f=\mathbb{R}$

$$f(x)=\frac{x^3-4x+3}{x^2+4}+\frac{(-\alpha x+\beta)(x^2+4)}{x^2+4}=\frac{x^3-4x+3-\alpha x^3+\beta x^2-4\alpha x+4\beta}{x^2+4}$$

$$=\frac{(1-\alpha)x^3+\beta x^2-4(\alpha+1)x+4\beta+3}{x^2+4}$$

$\acute{E}\sigma\tau\omega\ 1-\alpha\neq 0.\ \mathrm{T}\acute{o}\tau\varepsilon\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-\alpha)x^3}{x^2}=(1-\alpha)\lim_{x\to+\infty}x=\begin{cases}+\infty,1-a>0\\-\infty,1-a<0\end{cases}(\acute{A}\tau o\pi o)$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(1-\alpha)x^3}{x^2}=(1-\alpha)\lim_{x\to-\infty}x=\begin{cases}-\infty,1-a>0\\+\infty,1-a<0\end{cases}(\acute{A}\tau o\pi o)$$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ 1-\alpha=0\Leftrightarrow\alpha=1.\ \Sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\acute{\omega}\varsigma\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$f(x)=\frac{\beta x^2-8x+4\beta+3}{x^2+4}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\beta x^2}{x^2}=\beta.\ \mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \beta=2$$

31.

$\mathrm{N}\alpha\ \beta\rho\varepsilon\theta\varepsilon\acute{\iota}\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $\pi\alpha\rho\alpha\gamma\omega\gamma\acute{\iota}\sigma\iota\mu\eta\ \mu\varepsilon$ $f(1)=-\ln(e-1)\ \kappa\alpha\iota\ f'(x)=-1-e^{f(x)}$, $\gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x>0$

$f'(x)=-1-e^{f(x)} \Leftrightarrow e^{-f(x)}f'(x)=e^{-f(x)}\left(-1-e^{f(x)}\right) \Leftrightarrow$

$e^{-f(x)}f'(x)=-e^{-f(x)}-e^{-f(x)}e^{f(x)} \Leftrightarrow e^{-f(x)}f'(x)=-\left(e^{-f(x)}+1\right) \Leftrightarrow$

$\left(-f'(x)\right)e^{-f(x)}=e^{-f(x)}+1 \Leftrightarrow \left[e^{-f(x)}\right]'=e^{-f(x)}+1 \Leftrightarrow \left[e^{-f(x)}+1\right]'=e^{-f(x)}+1$

$\Theta\varepsilon\omega\rho\acute{\omega}\ \tau\eta\nu\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ g(x)=e^{-f(x)}+1, x>0$

$g'(x)=g(x) \Leftrightarrow g'(x)-g(x)=0 \Leftrightarrow e^{-x}\left[g'(x)-g(x)\right]=0 \Leftrightarrow$

$e^{-x}g'(x)+g(x)\left(-e^{-x}\right)=0 \Leftrightarrow e^{-x}g'(x)+g(x)\left(e^{-x}\right)'=0 \Leftrightarrow \left(g(x)e^{-x}\right)'=0$

$\Sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\acute{\omega}\varsigma\ \upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota\ c\in\mathbb{R}\ \tau\acute{\varepsilon}\tau o\iota o\ \acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in(0,+\infty)\ \nu\alpha\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota:$

$g(x)e^{-x}=c \Leftrightarrow g(x)e^{-x}e^{x}=ce^{x} \Leftrightarrow g(x)=ce^{x} \Leftrightarrow e^{-f(x)}+1=ce^{x}\ (1)$

$\Theta\acute{\varepsilon}\tau\omega\ x=1\ \sigma\tau\eta\nu\ \sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\eta\ (1): e^{-f(1)}+1=ce \Leftrightarrow e^{-\left[-\ln(e-1)\right]}+1=ce \Leftrightarrow$

$\boxed{e^{\ln\theta}=\theta, \theta>0}$

$e^{\ln(e-1)}+1=ce \Leftrightarrow e-1+1=ce \Leftrightarrow e=ce \Leftrightarrow c=1$

$T\acute{o}\tau\varepsilon\ \alpha\pi o\ \tau\eta\nu\ \sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\eta\ (1)\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$e^{-f(x)}+1=e^{x} \Leftrightarrow e^{-f(x)}=e^{x}-1\left(x>0 \Rightarrow e^{x}>1 \Rightarrow e^{x}-1>0\right)$

$\ln e^{-f(x)}=\ln\left(e^{x}-1\right) \Leftrightarrow -f(x)\ln e=\ln\left(e^{x}-1\right) \Leftrightarrow f(x)=-\ln\left(e^{x}-1\right)$

32.

Θεωρούμε δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο για την οποία ισχύουν:

- $f''(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- Η κλίση της f στο μηδέν είναι μηδέν, ενώ η κλίση της γραφικής παράστασης της f στο $(1,1)$ είναι 2

α. Να αποδείξετε ότι η f στρέφει τα κοίλα άνω στο $\mathbb{R}$.

β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f, που είναι κάθετη στην ευθεία $y=-2024x+1$

γ. Να αποδείξετε ότι $f(x)\geq 2x-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

δ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)+e^{|x-1|}=2x$

ε. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1\left(f^2(x)+2f(x)\right)dx>\frac{1}{3}$

α.Επειδή η κλίση της f στο μηδέν είναι μηδέν θα έχω $f'(0)=0$

Επειδή η κλίση της f στο $(1,1)$ είναι μηδέν θα έχω $f'(1)=2$

$$Έχω:\begin{cases}(\mathrm{I})\ \text{Η } f' \text{ συνεχής στο } [0,1] \text{ ως παραγωγίσιμη}\\ (\mathrm{II})\ \text{Η } f' \text{ παραγωγίσιμη στο } (0,1)\end{cases}$$

Οπότε η f ικανοποιεί τις προυποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο κλειστό διάστημα $[0,1]$. Οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$f''(x_0)=\frac{f'(1)-f'(0)}{1-0}=\frac{2-1}{1-0}=2$$

$$Έχω:\begin{cases}(\mathrm{I})\ \text{Η } f'' \text{ συνεχής στο } \mathbb{R}\\ (\mathrm{II})\ f''(x)\neq 0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}\end{cases}$$

Οπότε $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ή $f''(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επειδή υπάρχει x_0 με $f''(x_0)>0$ προκύπτει ότι $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Συνεπώς η f στρέφει τα κοίλα άνω στο $\mathbb{R}$

$$\beta.\ \acute{E}\chi\omega:\begin{cases}(\mathrm{I})\ \text{Η } f' \ \epsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\epsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ [0,1] \\ (\mathrm{II})\ f'(0)=0<\dfrac{1}{2024}<2=f'(1)\end{cases}$$

Οπότε απο το Θ.Ε.Τ υπάρχει $\xi \in (0,1)$ με $f'(\xi)=\dfrac{1}{2024}$

Αν (ε) η εφαπτομένη της C_f στο σημείο επαφής $\mathrm{A}(\xi, f(\xi))$ τότε θα

έχω $\lambda_{\varepsilon}=f'(\xi)=\dfrac{1}{2024}$

$(\eta): y=-2024x+1, \lambda_{\eta}=-2024$

Έχω: $\lambda_{\varepsilon}\lambda_{\eta}=\dfrac{1}{2024}(-2024)=-1$

Συνεπώς $(\varepsilon)\perp(\eta)$

γ. Αν (ε_1) η εφαπτομένη της C_f στο σημείο επαφής $\mathrm{B}(1, f(1))$ τότε η (ε_1) θα έχει εξίσωση:

$$y-f(1)=f'(1)(x-1)\overset{\substack{f(1)=1\\ f'(1)=2}}{\Longleftrightarrow} y-1=2(x-1)\Leftrightarrow y=2x-1$$

Επειδή η f στρέφει τα κοίλα άνω στο $\mathbb{R}$ θα έχω:

$f(x)\geq 2x-1$

<u>Η ισότητα θα ισχύει μόνο αν $x=1$!!!</u>

δ. Αν $x\neq 1$ θα έχω:

$$\begin{Bmatrix} f(x)>2x-1 \\ x-1\neq 0\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix} f(x)>2x-1 \\ |x-1|>0\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix} f(x)>2x-1 \\ e^{|x-1|}>e^{0}\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$f(x)+e^{|x-1|}>2x-1+1\Rightarrow f(x)+e^{|x-1|}>2x$$

Αν $x=1$ θα έχω:

$$\begin{cases} f(x)=2x-1 \\ x-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x)=2x-1 \\ |x-1|=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x)=2x-1 \\ e^{|x-1|}=e^0=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$f(x)+e^{|x-1|}=2x-1+1=2x$$

Άρα η εξίσωση $f(x)+e^{|x-1|}=2x$ *έχει μοναδική ρίζα το* $x=1$

$$\varepsilon.\int_0^1 \left(f^2(x)+2f(x)\right)dx>\frac{1}{3} \Leftrightarrow \int_0^1 \left(f^2(x)+2f(x)\right)dx+1>\frac{1}{3}+1 \overset{\int_0^1 dx=1}{\Longleftrightarrow}$$

$$\int_0^1 \left(f^2(x)+2f(x)\right)dx+\int_0^1 dx>\frac{4}{3} \Leftrightarrow \int_0^1 \left(f^2(x)+2f(x)+1\right)dx>\frac{4}{3} \Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 \left(f(x)+1\right)^2 dx>\frac{4}{3}$$

Αρκεί να αποδείξω $\int_0^1 \left(f(x)+1\right)^2 dx>\frac{4}{3}$

Αν $x\in[0,1)$ θα έχω:

$$\begin{cases} f(x)>2x-1 \\ x\in[0,1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x)+1>2x\geq 0 \\ x\in[0,1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[f(x)+1\right]^2>(2x)^2 \\ x\in[0,1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \left[f(x)+1\right]^2>4x^2 \\ x\in[0,1) \end{cases} \Rightarrow \int_0^1 \left(f(x)+1\right)^2 dx>\int_0^1 4x^2dx \Rightarrow \int_0^1 \left(f(x)+1\right)^2 dx>4\int_0^1 x^2dx \Rightarrow$$

$$\int_0^1 \left(f(x)+1\right)^2 dx>4\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 \Rightarrow \int_0^1 \left(f(x)+1\right)^2 dx>4\left(\frac{1^3}{3}-\frac{0^3}{3}\right) \Rightarrow$$

$$\int_0^1 \left(f(x)+1\right)^2 dx>\frac{4}{3}$$

33.

Αν $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu^{\nu}x}{\eta\mu^{\nu}x+\sigma\upsilon\nu^{\nu}x}dx$ *και* $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu^{\nu}x}{\eta\mu^{\nu}x+\sigma\upsilon\nu^{\nu}x}dx$ *όπου* ν *θετικός ακέραιος να δείξετε ότι* $I=J=\frac{\pi}{4}$

$$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\eta\mu^{\nu}x}{\eta\mu^{\nu}x+\sigma\upsilon\nu^{\nu}x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma\upsilon\nu^{\nu}x}{\eta\mu^{\nu}x+\sigma\upsilon\nu^{\nu}x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\eta\mu^{\nu}x+\sigma\upsilon\nu^{\nu}x}{\eta\mu^{\nu}x+\sigma\upsilon\nu^{\nu}x}dx=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\left[x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}$$

$\underline{\Gamma\iota\alpha\ \tau o\ o\lambda o\kappa\lambda\acute{\eta}\rho\omega\mu\alpha\ J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma\upsilon\nu^{\nu}x}{\eta\mu^{\nu}x+\sigma\upsilon\nu^{\nu}x}dx}$

$\Theta\acute{\varepsilon}\tau\omega: x=\frac{\pi}{2}-t$

$x=\frac{\pi}{2}:\frac{\pi}{2}-t=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow -t=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow -t=0\Leftrightarrow t=0$

$x=0:\frac{\pi}{2}-t=0\Leftrightarrow t=\frac{\pi}{2}$

$dx=\left(\frac{\pi}{2}-t\right)'dt=-dt$

$$J=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sigma\upsilon\nu^{\nu}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{\eta\mu^{\nu}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)x+\sigma\upsilon\nu^{\nu}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}(-dt)=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\eta\mu^{\nu}t}{\sigma\upsilon\nu^{\nu}t+\eta\mu^{\nu}t}dt=$$

$$-\left(-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\eta\mu^{\nu}t}{\sigma\upsilon\nu^{\nu}t+\eta\mu^{\nu}t}dt\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\eta\mu^{\nu}t}{\sigma\upsilon\nu^{\nu}t+\eta\mu^{\nu}t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\eta\mu^{\nu}x}{\sigma\upsilon\nu^{\nu}x+\eta\mu^{\nu}x}dx=I$$

$$\boxed{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\eta\mu x,\ \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sigma\upsilon\nu x}$$

$$I+J=\frac{\pi}{2}\overset{I=J}{\Longleftrightarrow}2I=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow I=\frac{\frac{\pi}{2}}{2}\Leftrightarrow I=\frac{\pi}{4}$$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon: I=J=\frac{\pi}{4}$

34.

Έστω $\alpha > 0$ *και* f, g *συναρτήσεις συνεχείς στο* $[-\alpha, \alpha]$. Αν f *είναι άρια και ισχύει* $\int_{-\alpha}^{\alpha} g(f(x))dx = c$ *να υπολογιστεί το* $I = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{g(f(x))}{1+e^x}dx$

Θέτω: $x = -t$

$x = -\alpha : -t = -\alpha \Leftrightarrow t = \alpha$

$x = \alpha : -t = \alpha \Leftrightarrow t = -\alpha$

$dx = (-t)' \, dt = -dt$

$$I = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{g(f(x))}{1+e^x}dx = \int_{\alpha}^{-\alpha} \frac{g(f(-t))}{1+e^{-t}}(-dt) \overset{f(-t)=f(t)}{=} -\left(-\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{g(f(t))}{1+\frac{1}{e^t}}dt\right) =$$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{g(f(t))}{\frac{e^t+1}{e^t}}dt = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{e^t g(f(t))}{e^t+1}dt = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{e^t+1-1}{e^t+1} g(f(t))dt =$$

$$= \int_{-\alpha}^{\alpha} \left(\frac{e^t+1}{e^t+1} - \frac{1}{e^t+1}\right) g(f(t))dt = \int_{-\alpha}^{\alpha} \left(1 - \frac{1}{e^t+1}\right) g(f(t))dt =$$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \left(g(f(t)) - \frac{g(f(t))}{e^t+1}\right)dt = \int_{-\alpha}^{\alpha} (g(f(t)))dt - \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{g(f(t))}{e^t+1}dt =$$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} (g(f(x)))dx - \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{g(f(x))}{e^x+1}dx = c - I$$

$$I = c - I \Leftrightarrow 2I = c \Leftrightarrow I = \frac{c}{2}$$

35.

Οι συναρτήσεις f_1, f_2 *είναι συνεχείς στο* $\mathbb{R}$ *και η* f_2 *άρτια και περιοδική με περίοδο* T. *Να δείξετε ότι*: $\int_0^T x(f_1 \circ f_2)(x)dx = \frac{T}{2}\int_0^T (f_1 \circ f_2)(x)dx$

$\text{Επειδή } f_2 \text{ είναι περιοδική με περίοδο } T \text{ θα έχω}: f_2(x+T)=f_2(x)$

$\text{Επειδή } f_2 \text{ είναι άρτια θα έχω}: f_2(-x)=f_2(x)$

$\text{Έχω}: I=\int_0^T x\, f_1(f_2(x))dx$

$\text{Θέτω}: x=-t+T$

$x=0: -t+T=0 \Leftrightarrow t=T$

$x=T: -t+T=T \Leftrightarrow t=0$

$dx=(-t+T)'\,dt=-dt$

$$I=\int_0^T x\, f_1(f_2(x))dx=\int_T^0(-t+T)\, f_1(f_2(-t+T))(-dt)\overset{f_2(-t+T)=f_2(-t)}{=}$$

$$-\int_T^0(-t+T)\, f_1(f_2(-t))dt\overset{f_2(-t)=f_2(t)}{=}-\left(-\int_0^T(-t+T)\, f_1(f_2(t))dt\right)=$$

$$\int_0^T(-t+T)\, f_1(f_2(t))dt=-\int_0^T tf_1(f_2(t))dt+\int_0^T T\, f_1(f_2(t))dt=$$

$$-\int_0^T tf_1(f_2(t))dt+T\int_0^T f_1(f_2(t))dt=-\int_0^T xf_1(f_2(x))dx+T\int_0^T f_1(f_2(x))dx=$$

$$-I+T\int_0^T f_1(f_2(x))dx$$

$$I=-I+T\int_0^T f_1(f_2(x))dx\Leftrightarrow 2I=T\int_0^T f_1(f_2(x))dx\Leftrightarrow I=\frac{T}{2}\int_0^T f_1(f_2(x))dx$$

36.

$\text{Η συνάρτηση } g \text{ είναι συνεχής αύξουσα στο } [1,4] \text{ με } g(1)>0 \text{ και}$
$g(1)g(2)g(4)=8. \text{ Να αποδείξετε ότι υπάρχει } \rho\in[0,4] \text{ με } g(\rho)=\rho$

$$x \in [1,4] \Rightarrow x \geq 1 \overset{g \uparrow [1,4]}{\Longrightarrow} g(x) \geq g(1) > 0 \Rightarrow g(x) > 0$$

Οπότε : $g(x) > 0$ *για κάθε* $x \in [1,4]$

Έστω $g(x) \neq x$ *για κάθε* $x \in [1,4]$.Θεωρώ *την συνάρτηση*

$h(x) = g(x) - x$ *για κάθε* $x \in [1,4]$

$$\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\ \mathrm{H}\ \text{είναι συνεχής στο } [1,4] \text{ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων} \\ (\mathrm{II})\ h(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in [1,4]\end{array}\right\}$$

Οπότε $h(x) > 0$ *για κάθε* $x \in [1,4]$ *ή* $h(x) < 0$ *για κάθε* $x \in [1,4]$

Αν $h(x) > 0$ *για κάθε* $x \in [1,4]$

$$\left\{\begin{array}{l}h(x) > 0 \\ \Gamma\text{ια κάθε } x \in [1,4]\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}g(x) > x \\ \Gamma\text{ια κάθε } x \in [1,4]\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}g(1) > 1 \\ g(2) > 2 \\ g(4) > 4\end{array}\right\} \Rightarrow g(1)g(2)g(4) > 1 \bullet 2 \bullet 4 \overset{g(1)g(2)g(4)=8}{\Longrightarrow} 8 > 8\ (\mathrm{ATO\Pi O})$$

Αν $h(x) < 0$ *για κάθε* $x \in [1,4]$

$$\left\{\begin{array}{l}h(x) < 0 \\ \Gamma\text{ια κάθε } x \in [1,4]\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}g(x) < x \\ \Gamma\text{ια κάθε } x \in [1,4]\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}g(1) < 1 \\ g(2) < 2 \\ g(4) < 4\end{array}\right\} \Rightarrow g(1)g(2)g(4) < 1 \bullet 2 \bullet 4 \overset{g(1)g(2)g(4)=8}{\Longrightarrow} 8 > 8\ (\mathrm{ATO\Pi O})$$

Συνεπώς υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho \in [1,4]$ *με* $g(\rho) = \rho$

37.

Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *παραγωγίσιμες συναρτήσεις και ισχύουν*

- $f(0) = g(0) = 0$
- $f'(x) = g'(x) + e^{2x} - 2x - 1, x \in \mathbb{R}$

Να *δειχτεί ότι* : $\int_0^1 f(x)dx > \int_0^1 g(x)dx$

$$f'(x)=g'(x)+e^{2x}-2x-1 \Leftrightarrow f'(x)=g'(x)+\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)'-\left(x^2\right)'-\left(x\right)' \Leftrightarrow$$

$$f'(x)=\left(g(x)+\frac{e^{2x}}{2}-x^2-x\right)'$$

Οπότε υπάρχει $c\in\mathbb{R}$ τέτοιος ώστε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να ισχύει:

$$f(x)=g(x)+\frac{e^{2x}}{2}-x^2-x+c$$

Αν $x=0$: $f(0)=g(0)+\frac{e^0}{2}-0^2-0+c \overset{f(0)=g(0)=0}{\Longleftrightarrow} 0=0+\frac{1}{2}+c \Leftrightarrow c=-\frac{1}{2}$

$$f(x)=g(x)+\frac{e^{2x}}{2}-x^2-x-\frac{1}{2} \Leftrightarrow f(x)-g(x)=\frac{e^{2x}-2x^2-2x-1}{2}$$

$$\int_0^1 \frac{e^{2x}-2x^2-2x-1}{2}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\left[\frac{e^{2x}}{2}-x^3-x^2-x\right]'dx=\frac{1}{2}\left[\frac{e^{2x}}{2}-x^3-x^2-x\right]_0^1=$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{e^2}{2}-3-\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{2}\frac{e^2-7}{2}>0$$

Έχω: $e>2,7\Rightarrow e^2>2,7^2\Rightarrow e^2>7,27>7\Rightarrow e^2-7>0$

$$f(x)-g(x)=\frac{e^{2x}-2x^2-2x-1}{2}\Rightarrow$$

$$\int_0^1\left[f(x)-g(x)\right]dx=\int_0^1\frac{e^{2x}-2x^2-2x-1}{2}dx>0\Rightarrow\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1 g(x)dx>0\Rightarrow$$

$$\int_0^1 f(x)dx>\int_0^1 g(x)dx$$

38.

Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ 2φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και ισχύουν

α) $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$

β) $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$

γ) $\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}=\frac{f'(\alpha)}{f'(\beta)}$

Να δειχτεί ότι θα υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta)$ τέτοια ώστε:

$$f(\xi_1)f''(\xi_1)+f(\xi_2)f''(\xi_2)>0$$

Θεωρώ την συνάρτηση $g:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ *με τύπο* $g(x)=\dfrac{f(x)}{f'(x)}$

$$\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}=\frac{f'(\alpha)}{f'(\beta)}\Leftrightarrow f(\alpha)f'(\beta)=f'(\alpha)f(\beta)$$

$$\begin{pmatrix}\Delta\text{ιαιρώ και τα δυο μέλη της εξίσωσης με } f'(\alpha)f'(\beta)\\ f'(\alpha),f'(\beta)\neq 0\Rightarrow f'(\alpha)f'(\beta)\neq 0\end{pmatrix}$$

$$\frac{f(\alpha)\cancel{f'(\beta)}}{f'(\alpha)\cancel{f'(\beta)}}=\frac{\cancel{f'(\alpha)}f(\beta)}{\cancel{f'(\alpha)}f'(\beta)}\Rightarrow\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}=\frac{f(\beta)}{f'(\beta)}\Rightarrow g(\alpha)=g(\beta)$$

$$g'(x)=\left[\frac{f(x)}{f'(x)}\right]'=\frac{f'(x)^2-f(x)f''(x)}{f'(x)^2},x\in[\alpha,\beta]$$

$$\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\text{Η συνάρτηση } g \text{ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα } [\alpha,\beta]\\ \text{ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων}\\ (\mathrm{II})\text{Η συνάρτηση } g \text{ είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα}\\ (\alpha,\beta)\text{ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων}\\ (\mathrm{III})\,g(\alpha)=g(\beta)\end{array}\right\}$$

Ο*πότε η συνάρτηση* g *ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος του* Rolle *στον κλειστό διάστημα* $[\alpha,\beta]$. *Άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον* $\xi_1\in(\alpha,\beta)$ *τέτοιο ώστε* $g'(\xi_1)=0$.

$$g'(\xi_1)=0\Leftrightarrow\frac{f'(\xi_1)^2-f(\xi_1)f''(\xi_1)}{f'(\xi_1)^2}=0\Leftrightarrow f(\xi_1)f''(\xi_1)=f'(\xi_1)^2$$

$$\xi_1\in(\alpha,\beta)\Rightarrow f'(\xi_1)\neq 0\Rightarrow f'(\xi_1)^2>0\overset{f(\xi_1)f''(\xi_1)=f'(\xi_1)^2}{\Longrightarrow}f(\xi_1)f''(\xi_1)>0(1)$$

$\Theta\varepsilon\omega\rho\acute{\omega}\ \tau\eta\nu\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ h:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}\ \mu\varepsilon\ \tau\acute{\upsilon}\pi o\ h(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

$$\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}=\frac{f'(\alpha)}{f'(\beta)}\Leftrightarrow f(\alpha)f'(\beta)=f'(\alpha)f(\beta)$$

$$\left(\begin{array}{l}\Delta\iota\alpha\iota\rho\acute{\omega}\ \kappa\alpha\iota\ \tau\alpha\ \delta\upsilon o\ \mu\acute{\varepsilon}\lambda\eta\ \tau\eta\varsigma\ \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta\varsigma\ \mu\varepsilon\ f(\alpha)f(\beta)\\ f(\alpha),f(\beta)\neq 0\Rightarrow f(\alpha)f(\beta)\neq 0\end{array}\right)$$

$$\frac{\cancel{f(\alpha)}f'(\beta)}{\cancel{f(\alpha)}f(\beta)}=\frac{f'(\alpha)\cancel{f(\beta)}}{f(\alpha)\cancel{f(\beta)}}\Rightarrow\frac{f'(\beta)}{f(\beta)}=\frac{f'(\alpha)}{f(\alpha)}\Rightarrow h(\alpha)=h(\beta)$$

$$h'(x)=\left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]'=\frac{f''(x)f(x)-f'(x)^2}{f^2(x)},x\in[\alpha,\beta]$$

$$\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\mathrm{H}\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ h\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ \kappa\lambda\varepsilon\iota\sigma\tau\acute{o}\ \delta\iota\acute{\alpha}\sigma\tau\eta\mu\alpha\ [\alpha,\beta]\\ \omega\varsigma\ \pi\eta\lambda\acute{\iota}\kappa o\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\omega}\nu\ \sigma\upsilon\nu\alpha\rho\tau\acute{\eta}\sigma\varepsilon\omega\nu\\ (\mathrm{II})\mathrm{H}\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ h\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \pi\alpha\rho\alpha\gamma\omega\gamma\acute{\iota}\sigma\iota\mu\eta\ \sigma\tau o\ \alpha\nu o\iota\kappa\tau\acute{o}\ \delta\iota\acute{\alpha}\sigma\tau\eta\mu\alpha\\ (\alpha,\beta)\omega\varsigma\ \pi\eta\lambda\acute{\iota}\kappa o\ \pi\alpha\rho\alpha\gamma\omega\gamma\acute{\iota}\sigma\iota\mu\omega\nu\ \sigma\upsilon\nu\alpha\rho\tau\acute{\eta}\sigma\varepsilon\omega\nu\\ (\mathrm{III})h(\alpha)=h(\beta)\end{array}\right\}$$

Οπότε η συνάρτηση h ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στον κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $h'(\xi_2)=0$.

$$h'(\xi_2)=0\Leftrightarrow\frac{f(\xi_2)f''(\xi_2)-f'(\xi_2)^2}{f'(\xi_2)^2}=0\Leftrightarrow f(\xi_2)f''(\xi_2)=f'(\xi_2)^2$$

$$\xi_2\in(\alpha,\beta)\Rightarrow f'(\xi_2)\neq 0\Rightarrow f'(\xi_2)^2>0\overset{f(\xi_2)f''(\xi_1)=f'(\xi_1)^2}{\Longrightarrow}f(\xi_2)f''(\xi_2)>0(2)$$

Απο τις σχέσεις $(1),(2)$ έχω:

$$\left.\begin{array}{l}f(\xi_1)f''(\xi_1)>0\\ f(\xi_2)f''(\xi_2)>0\end{array}\right\}\Rightarrow f(\xi_1)f''(\xi_1)+f(\xi_2)f''(\xi_2)>0$$

39.

Να λυθεί στο $\mathbb{R}$ η ανίσωση:

$$e^{x^2+x+1}-e^{x+1}+x^2>0$$

$\Theta\varepsilon\omega\rho\acute{\omega}\ \tau\eta\nu\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f(x)=e^{x^2+x+1}-e^{x+1}+x^2, x\in\mathbb{R}$

$$f'(x)=\left(e^{x^2+x+1}-e^{x+1}+x^2\right)'=(2x+1)e^{x^2+x+1}-e^{x+1}+2x$$

$$f''(x)=(2x+1)'e^{x^2+x+1}+(2x+1)\left(e^{x^2+x+1}\right)'-e^{x+1}+2=$$

$$=2e^{x^2+x+1}+(2x+1)^2e^{x^2+x+1}-e^{x+1}+2\overset{2e^{x^2+x+1}=e^{x^2+x+1}+e^{x^2+x+1}}{=}$$

$$e^{x^2+x+1}+(2x+1)^2e^{x^2+x+1}+e^{x^2+x+1}-e^{x+1}+2=$$

$$=e^{x^2+x+1}+(2x+1)^2e^{x^2+x+1}+e^{x+1}\left(e^{x^2+x+1-x-1}-1\right)+2=$$

$$e^{x^2+x+1}+(2x+1)^2e^{x^2+x+1}+e^{x+1}\left(e^{x^2}-1\right)+2$$

$$\left\{\begin{array}{l}(2x+1)^2\geq 0\\ e^{x^2+x+1}>0, e^{x+1}>0\\ x^2\geq 0\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}e^{x^2+x+1}(2x+1)^2\geq 0\\ e^{x^2+x+1}>0, e^{x+1}>0\\ e^{x^2}\geq 1\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}e^{x^2+x+1}(2x+1)^2\geq 0\\ e^{x^2+x+1}>0, e^{x+1}>0\\ e^{x^2}-1\geq 0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}e^{x^2+x+1}(2x+1)^2\geq 0\\ e^{x^2+x+1}>0, e^{x+1}>0\\ e^{x^2}-1\geq 0\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}e^{x^2+x+1}(2x+1)^2\geq 0\\ e^{x+1}\left(e^{x^2}-1\right)>0\\ e^{x^2+x+1}>0\\ 2>0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$e^{x^2+x+1}+(2x+1)^2e^{x^2+x+1}+e^{x+1}\left(e^{x^2}-1\right)+2>0\Rightarrow f''(x)>0$$

$\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ f''(x)>0\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in\mathbb{R}\ \eta\ f'\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \gamma\nu\eta\sigma\acute{\iota}\omega\varsigma\ \alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha\ \sigma\tau o\ \mathbb{R}$

$$f'(0)=(2\bullet 0+1)e-e+0=0$$

$$\mathrm{A}\nu\ x<0\overset{f'\uparrow\mathbb{R}}{\Longrightarrow}f'(x)<f'(0)\Rightarrow f'(x)<0$$

$$\mathrm{A}\nu\ x>0\overset{f'\uparrow\mathbb{R}}{\Longrightarrow}f'(x)>f'(0)\Rightarrow f'(x)>0$$

$$\begin{cases}(\mathrm{I})\ f'(x)<0 \text{ για κάθε } x\in(-\infty,0)\\(\mathrm{II})\ f'(x)>0 \text{ για κάθε } x\in(0,+\infty)\\(\mathrm{III})\ \text{Η } f \text{ είναι συνεχής στην θέση } x_0=0\end{cases}$$

Οπότε η συνάρτηση f έχει ελάχιστη τιμή στην θέση $x_0=0$ τον αριθμό $f(x_0)=f(0)=e-e+0=0$

Άρα θα έχω $f(x)\geq f(0)\Rightarrow f(x)\geq 0$

Έστω υπάρχει $x_1<0$ με $f(x_1)=0$

$$\begin{cases}(\mathrm{I})\text{Η συνάρτηση } f \text{ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα } [x_1,0]\\(\mathrm{II})\text{Η συνάρτηση } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα}\\(x_1,0)\\(\mathrm{III})\ f(x_1)=f(0)\end{cases}$$

Οπότε η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στον κλειστό διάστημα $[x_1,0]$. Άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1\in(x_1,0)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1)=0$.

Άτοπο γιατί $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)$

Έστω υπάρχει $x_2>0$ με $f(x_2)=0$

$$\begin{cases}(\mathrm{I})\text{Η συνάρτηση } f \text{ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα } [0,x_2]\\(\mathrm{II})\text{Η συνάρτηση } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα}\\(0,x_2)\\(\mathrm{III})\ f(x_2)=f(0)\end{cases}$$

Οπότε η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στον κλειστό διάστημα $[0,x_2]$. Άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2\in(0,x_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2)=0$.

Άτοπο γιατί $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

Οπότε για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ θα έχω $f(x)>0$

40.

Δίνεται η $f(x)=\kappa^x+\lambda^x+(\kappa\lambda)^{-x}+2021, x\in\mathbb{R}$ με $0<\kappa,\lambda,\kappa\lambda\neq 1.$ Να αποδείξετε ότι: (I) Η στρέφει τα κοίλα ανω στο $\mathbb{R}$ (II) $f(x)\geq 2024$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

$$f'(x)=\kappa^x\ln\kappa+\lambda^x\ln\lambda-(\kappa\lambda)^{-x}\ln\kappa\lambda$$

$$f''(x)=\kappa^x\ln^2\kappa+\lambda^x\ln^2\lambda+(\kappa\lambda)^{-x}\ln^2\kappa\lambda$$

$$\left.\begin{cases}0<\kappa\neq 1\\ 0<\lambda\neq 1\\ 0<\kappa\lambda\neq 1\end{cases}\right\}\Rightarrow\left.\begin{cases}\ln\kappa\neq 0\\ \ln\lambda\neq 0\\ \ln\kappa\lambda\neq 0\end{cases}\right\}\Rightarrow\left.\begin{cases}\ln^2\kappa>0\\ \ln^2\lambda\neq 0\\ \ln^2\kappa\lambda\neq 0\end{cases}\right\}\Rightarrow\left.\begin{cases}\kappa^x\ln^2\kappa>0\\ \lambda^x\ln^2\lambda>0\\ (\kappa\lambda)^{-x}\ln^2\kappa\lambda>0\end{cases}\right\}\Rightarrow$$

$$\kappa^x\ln^2\kappa+\lambda^x\ln^2\lambda+(\kappa\lambda)^{-x}\ln^2\kappa\lambda>0\Rightarrow f''(x)>0$$

Επειδή $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω στο $\mathbb{R}$. Οπότε η f' είναι γνησίως αύξουσα.

$$f'(0)=\kappa^0\ln\kappa+\lambda^0\ln\lambda-(\kappa\lambda)^{-0}\ln\kappa\lambda=\ln\kappa+\ln\lambda-\ln\kappa\lambda=\ln\kappa\lambda-\ln\kappa\lambda=0$$

Αν $x<0\overset{f'\uparrow\mathbb{R}}{\Longrightarrow}f'(x)<f'(0)\Rightarrow f'(x)<0$

Αν $x>0\overset{f'\uparrow\mathbb{R}}{\Longrightarrow}f'(x)>f'(0)\Rightarrow f'(x)>0$

$$\left.\begin{cases}(\mathrm{I})\ f'(x)<0 \text{ για κάθε } x\in(-\infty,0)\\ (\mathrm{II})\ f'(x)>0 \text{ για κάθε } x\in(0,+\infty)\\ (\mathrm{III})\ \text{Η } f \text{ είναι συνεχής στην θέση } x_0=0\end{cases}\right\}$$

Οπότε η συνάρτηση f έχει ελάχιστη τιμή στην θέση $x_0=0$ τον αριθμό $f(x_0)=f(0)=\kappa^0+\lambda^0+(\kappa\lambda)^0+2021=2024$

Άρα θα έχω $f(x)\geq f(0)\Rightarrow f(x)\geq 2024$

41.

Έστω η κυρτή συνάρτηση $f(x)=x^4-2mx^3+6(m-1)x^2-4mx+8, x\in\mathbb{R}$ Να αποδείξετε ότι: $f(x)=x^4-4x^3+6x^2-8x+8$

$f(x)=x^4-2mx^3+6(m-1)x^2-4mx+8$

$f'(x)=4x^3-6mx^2+12(m-1)x-4m$

$f''(x)=12x^2-12mx+12(m-1)=12(x^2-mx+m-1)$

$\text{Επειδή } \eta\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \kappa\upsilon\rho\tau\acute{\eta}\ \theta\alpha\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota\ f''(x)\geq 0\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in\mathbb{R}.\ \text{Οπότε}:$

$x^2-mx+m-1\geq 0\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in\mathbb{R}$

$\text{Συνεπώς}: \Delta\leq 0\Leftrightarrow(-m)^2-4(m-1)\leq 0\Leftrightarrow m^2-4m+4\leq 0\Leftrightarrow(m-2)^2\leq 0$

$$\left\{\begin{matrix}(m-2)^2\leq 0\\(m-2)^2\geq 0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow(m-2)^2=0\Leftrightarrow m-2=0\Leftrightarrow m=2$$

$\underline{\Theta\alpha\ \delta\varepsilon\acute{\iota}\xi\omega\ \text{ότι}\ \gamma\iota\alpha\ m=2\ \eta\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \kappa\upsilon\rho\tau\acute{\eta}}$

$f''(x)=12(x^2-2x+1)=12(x-1)^2$

$\text{Θεωρώ την συνάρτηση } g(x)=f'(x), x\in\mathbb{R}$

$$\left\{\begin{matrix}(\mathrm{I})\ g'(x)>0\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in(-\infty,1)\\(\mathrm{II})\ g'(x)>0\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in(,+\infty)\\(\mathrm{III})\ \text{Η } g\ \text{είναι συνεχής στην θέση } x_0=1\end{matrix}\right\}$$

$\text{Οπότε η } g \text{ είναι γνησίως αύξουσα. Συνεπώς } f' \text{ γνησίως αύξουσα}$

$\text{Άρα η } f \text{ είναι κυρτή. Τότε για } m=2 \text{ ο τύπος της } f \text{ γίνεται}:$

$f(x)=x^4-2\bullet 2x^3+6(2-1)x^2-4\bullet 2x+8=x^4-4x^3+6x^2-8x+8$

42.

$\Delta \acute{\iota}\nu\varepsilon\tau\alpha\iota\ \eta\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R},\ \pi\alpha\rho\alpha\gamma\omega\gamma\acute{\iota}\sigma\iota\mu\eta\ \sigma\tau o\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\ \gamma\iota\alpha$

$\tau\eta\nu\ o\pi o\acute{\iota}\alpha\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota\ \acute{o}\tau\iota:$

$$xf'(x)+f(x)=-\eta\mu x\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

$\alpha.$ Να αποδείξετε ότι $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}, x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right] \\ 0, x=0\end{cases}$

$\beta.$ Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}

$\gamma.$ Αν $\alpha,\beta\in(0,1)$ να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(\alpha^2+\beta^2\right), f(\alpha+\beta)$

$\delta.$ Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0} xf^{-1}(x)$

$\alpha.\ xf'(x)+f(x)=-\eta\mu x \Leftrightarrow xf'(x)+f(x)(x)'=(\sigma\upsilon\nu x)' \Leftrightarrow$

$(xf(x))'=(\sigma\upsilon\nu x)'$

Επειδή $(xf(x))'=(\sigma\upsilon\nu x)'$ *για κάθε* $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ *θα υπάρχει* $c\in\mathbb{R}$ *τέτοιο*

ώστε να ισχύει: για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

$xf(x)=\sigma\upsilon\nu x+c$ *για κάθε* $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

Επειδή *η συνάρτηση* f *είναι συνεχής στο κλειστό και φραγμένο*

διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ *απο το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής*

θα έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Οπότε *θα υπάρχουν* $x_1,x_2\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

τέτοια ώστε να ισχύει:

$m\le f(x)\le M,\ f(x_1)=m,\ f(x_2)=M$ *για κάθε* $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

Αν $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ *θα έχω:*

$m\le f(x)\le M \overset{x>0}{\Longrightarrow} mx\le xf(x)\le Mx$

$$\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\ mx\le xf(x)\le Mx,\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\\ (\mathrm{II})\ \lim\limits_{x\to 0}(mx)=\lim\limits_{x\to 0}(Mx)=0\end{array}\right\}$$

Οπότε *απο το κριτήριο της παρεμβολής θα έχω* $\lim\limits_{x\to 0}xf(x)=0$

$\text{Αν } x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \text{ θα έχω:}$

$xf(x)=\sigma\upsilon\nu x+c \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} xf(x)=\lim\limits_{x\to 0}(\sigma\upsilon\nu x+c) \Rightarrow 0=c+1 \Rightarrow c=-1$

$\text{Αν } x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \text{ θα έχω:}$

$$xf(x)=\sigma\upsilon\nu x-1 \overset{x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow x\neq 0}{\Longleftrightarrow} f(x)=\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}$$

$\text{Οπότε: } f(x)=\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x} \text{ για κάθε } x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ θα είναι και συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Οπότε θα είναι συνεχής αντίστοιχα στα σημεία $\xi_1=\frac{\pi}{2}$ και $\xi_1=0$. Άρα θα έχω $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x)$ και $f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{0-1}{\frac{\pi}{2}}=-\frac{2}{\pi}$$

Αν στην παράσταση $\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}$ θέσω $x=\frac{\pi}{2}$ θα έχω:

$$\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}-1}{\frac{\pi}{2}}=-\frac{2}{\pi}=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$\text{Οπότε: } f(x)=\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x} \text{ για κάθε } x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$

$$f(0)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0$$

$\beta.$ Αν $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ θα έχω:

$$f'(x)=\frac{(\sigma\upsilon\nu x-1)'x-(\sigma\upsilon\nu x-1)(x)'}{x^2}=\frac{-x\eta\mu x-(\sigma\upsilon\nu x-1)}{x^2}=$$

$$=-\frac{x\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x-1}{x^2}$$

$\Theta\varepsilon\omega\rho\acute{\omega}\ \tau\eta\nu\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ g(x)=x\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x-1, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

$$g'(x)=(x)'\eta\mu x+x(\eta\mu x)'+(\sigma\upsilon\nu x)'=\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x=x\sigma\upsilon\nu x$$

$\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ g'(x)>0\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\ \pi\rho o\kappa\acute{\upsilon}\pi\tau\varepsilon\iota\ \acute{o}\tau\iota\ g\underset{\wedge}{\uparrow}\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

$$\acute{E}\chi\omega:\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\ g\underset{\wedge}{\uparrow}\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\\ (\mathrm{II})\ \mathrm{H}\ g\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\end{array}\right\}$$

$$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon:\ g\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=\left(\lim_{x\to 0^+}g(x),\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}g(x)\right)=\left(0,\frac{\pi}{2}-1\right)$$

$$\left(\frac{\pi}{2}-1>0\Leftrightarrow\frac{\pi}{2}>1\Leftrightarrow\pi>2(\mathrm{I}\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota)\right)$$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ g(x)>0\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right):$

$$x\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x-1>0\Leftrightarrow-(x\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x-1)<0\Leftrightarrow-\frac{x\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x-1}{x^2}\Leftrightarrow$$

$f'(x)<0\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

$$\acute{E}\chi\omega:\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\ f'(x)<0\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\\ (\mathrm{II})\ \mathrm{H}\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\end{array}\right\}\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon:f\overset{\vee}{\downarrow}\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

$\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ f\overset{\vee}{\downarrow}\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\eta\ f\ \alpha\nu\tau\iota\sigma\tau\rho\acute{\varepsilon}\varphi\varepsilon\tau\alpha\iota.$

$$\text{Έχω}:\begin{Bmatrix}(\mathrm{I})\ f \overset{\vee}{\downarrow}\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right] \\ (\mathrm{II})\ \text{Η } f \text{ είναι συνεχής στο } \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\end{Bmatrix}$$

$$\text{Οπότε}: f\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)=\left[f\left(\frac{\pi}{2}\right),f(0)\right]=\left[-\frac{2}{\pi},0\right]$$

$$D_{f^{-1}}=f\left(D_f\right)=f\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)=\left[-\frac{2}{\pi},0\right]$$

γ. Αν $\alpha,\beta\in(0,1)$ θα έχω:

$$\alpha^2+\beta^2<\alpha+\beta \Leftrightarrow \alpha^2-\alpha+\beta^2-\beta<0 \Leftrightarrow \alpha(\alpha-1)+\beta(\beta-1)<0\,(\text{Ισχύει})$$

$$\alpha,\beta\in(0,1)\Rightarrow\begin{Bmatrix}\alpha>0\\ \alpha<1\\ \beta>0\\ \beta<1\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}\alpha>0\\ \alpha-1<0\\ \beta>0\\ \beta-1<0\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}\alpha(\alpha-1)<0\\ \beta(\beta-1)<0\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\alpha(\alpha-1)+\beta(\beta-1)<0$$

$$\text{Οπότε}:\alpha^2+\beta^2<\alpha+\beta \overset{f \overset{\vee}{\downarrow}\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}{\Longrightarrow} f\left(\alpha^2+\beta^2\right)>f(\alpha+\beta)$$

$$\delta.\ \text{Έχω}: f^{-1}\left(D_{f^{-1}}\right)=D_f=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\text{Οπότε } 0\le f^{-1}(x)\le\frac{\pi}{2} \text{ για κάθε } x\in\left[-\frac{2}{\pi},0\right]. \text{Αν } x\in\left(-\frac{2}{\pi},0\right) \text{ θα έχω}:$$

$$0\le f^{-1}(x)\le\frac{\pi}{2} \overset{x\in\left(-\frac{2}{\pi},0\right)\Rightarrow x<0}{\Longrightarrow} \frac{\pi x}{2}\le xf^{-1}(x)\le 0$$

$$\begin{Bmatrix}(\mathrm{I})\ \dfrac{\pi x}{2}\le xf^{-1}(x)\le 0,\ x\in\left(-\dfrac{2}{\pi},0\right)\\ (\mathrm{II})\ \lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\pi x}{2}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\pi x}{2}=0\end{Bmatrix}$$

$$\text{Οπότε απο το κριτήριο παρεμβολής θα έχω } \lim_{x\to0^-}xf^{-1}(x)=0$$

43.

Έστω f *ορισμένη στο* $[0,+\infty)$ *και* F *παράγουσα της* f *στο* $[0,+\infty)$ *ώστε να ισχύει* $2F'(x)=xf'(x)+2$ *για* $x>0$ *και* $f'(1)=2$. Ν*α δειχθούν*:

(I) $f(x)=1+x^2$ *για κάθε* $x>0$

(II) Υ*λικό σημείο* $\mathrm{A}(\alpha, f(a))$ *με* $\alpha>0$ *κινείται στην* C_f. Η *εφαπτομένη της* C_f *στο* Α *τέμνει τον άξονα* $x'x$ *στο σημείο* $\mathrm{B}(x_0,0)$. Β*ρείτε την θέση του* Α *στην οποία κάποια στιγμή* t_0 *ισχύει* $x_0'(t_0)=5\alpha'(t_0)$

(III) Ν*α δείξετε ότι*: $2e^2<\int_0^1\left[e^{f(x)}+e^{4-f(x)}\right]dx<e^{1+e^2}$

(IV) Ν*α υπολογισθεί* $\mathrm{I}=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{1}{x^2}-2\right)e^{f(x)}dx$

(I) Επειδή F παράγουσα της f στο $[0,+\infty)$ θα έχω:

$F'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$

Αν $x>0$:

$$2F'(x)=xf'(x)+2 \Leftrightarrow 2f(x)=xf'(x)+2 \Leftrightarrow 2f(x)-2-xf'(x)=0$$

$$2\left[f(x)-1\right]-xf'(x)=0 \overset{\substack{\text{Πολλαπλασιάζω και}\\ \text{τα δυο μέλη της}\\ \text{εξίσωσης με το } x}}{\Longleftrightarrow} x\left\{2\left[f(x)-1\right]-xf'(x)\right\}=0 \Leftrightarrow$$

$$2x\left[f(x)-1\right]-x^2f'(x)=0 \Leftrightarrow -\left\{2x\left[f(x)-1\right]-x^2f'(x)\right\}=0 \Leftrightarrow$$

$$-2x\left[f(x)-1\right]+x^2f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2f'(x)-2x\left[f(x)-1\right]=0$$

$$\overset{\substack{\left[f(x)-1\right]'=f'(x)\\ \left(x^2\right)'=2x}}{\Longleftrightarrow} x^2\left[f(x)-1\right]'-\left[f(x)-1\right]\left(x^2\right)'=0$$

$$\overset{\substack{\text{Διαιρώ και τα δυο μέλη}\\ \text{εξίσωσης με το } x^4}}{\Longleftrightarrow} \frac{x^2\left[f(x)-1\right]'-\left[f(x)-1\right]\left(x^2\right)'}{x^4}=0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2\left[f(x)-1\right]'-\left[f(x)-1\right]\left(x^2\right)'}{\left(x^2\right)^2}=0 \Leftrightarrow \left[\frac{f(x)-1}{x^2}\right]'=0$$

Οπότε υπάρχει $c\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε για κάθε $x\in(0,+\infty)$ να ισχύει:

$$\frac{f(x)-1}{x^2}=c \Leftrightarrow f(x)-1=cx^2 \Leftrightarrow f(x)=cx^2+1$$

$f'(x)=2cx$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$

$f'(1)=2 \Leftrightarrow \cancel{2}c=\cancel{2}\bullet 1 \Leftrightarrow c=1$

$f(x)=1+x^2$ για κάθε $x>0$

(II) Αν (ε) η εφαπτομένη της C_f στο σημείο επαφής $\mathrm{A}\left(\alpha, f(a)\right)$. Τότε η (ε) έχει εξίσωση:

$$y-f(a)=f'(a)(x-\alpha) \Leftrightarrow y-\left(\alpha^2+1\right)=2\alpha(x-\alpha) \Leftrightarrow y-\alpha^2-1=2\alpha x-2\alpha^2$$

$$y=2\alpha x-\alpha^2+1$$

$\text{Αν}\ \mathrm{B}(x_0,0)$ *το κοινό σημείο της* (ε) *με τον άξονα* $x'x$. Τότε *θα έχω*:

$$0=2\alpha x_0-\alpha^2+1\Leftrightarrow 2\alpha x_0=\alpha^2-1\Leftrightarrow x_0=\frac{\alpha^2-1}{2\alpha}\Leftrightarrow x_0=\frac{\alpha^2}{2\alpha}-\frac{1}{2\alpha}\Leftrightarrow$$

$$x_0=\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2\alpha}\Leftrightarrow x_0=\frac{1}{2}\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)$$

$$\text{Έχω}: x_0(t)=\frac{1}{2}\left[\alpha(t)-\frac{1}{\alpha(t)}\right]$$

$$x_0'(t)=\frac{1}{2}\left[\alpha'(t)-\left(\frac{1}{\alpha(t)}\right)'\right]=\frac{1}{2}\left[\alpha'(t)-\left(-\frac{\alpha'(t)}{\alpha^2(t)}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\alpha'(t)+\frac{\alpha'(t)}{\alpha^2(t)}\right]=$$

$$\frac{\alpha'(t)}{2}\left[1+\frac{1}{\alpha^2(t)}\right]=\frac{\alpha'(t)}{2}\left[\frac{\alpha^2(t)}{\alpha^2(t)}+\frac{1}{\alpha^2(t)}\right]=\frac{\alpha'(t)}{2}\frac{\alpha^2(t)+1}{\alpha^2(t)}$$

$$x_0'(t)=\frac{\alpha'(t)}{2}\frac{\alpha^2(t)+1}{\alpha^2(t)}$$

Την *χρονική στιγμή* t_0 *ισχύει* $x_0'(t_0)=5\alpha'(t_0)$:

$$x_0'(t)=\frac{\alpha'(t_0)}{2}\frac{\alpha^2(t)+1}{\alpha^2(t)}\Leftrightarrow 5\alpha'(t_0)=\frac{\alpha'(t_0)}{2}\frac{\alpha^2(t)+1}{\alpha^2(t)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10\alpha'(t_0)\alpha^2(t_0)=\alpha'(t_0)\left[\alpha^2(t_0)+1\right]\Leftrightarrow$$

$$10\alpha'(t_0)\alpha^2(t_0)-\alpha'(t_0)\left[\alpha^2(t_0)+1\right]=0\Leftrightarrow$$

$$\alpha'(t_0)\left[10\alpha^2(t_0)-\alpha^2(t_0)-1\right]=0\Leftrightarrow\alpha'(t_0)\left[9\alpha^2(t_0)-1\right]=0\Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{matrix}\alpha'(t_0)=0\\ \acute{\eta}\\ 9\alpha^2(t_0)-1=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}\alpha'(t_0)=0\\ \acute{\eta}\\ \alpha^2(t_0)=\frac{1}{9}\end{matrix}\right\}\overset{\alpha(t_0)>0}{\Longleftrightarrow}\left\{\begin{matrix}\alpha'(t_0)=0\\ \acute{\eta}\\ \alpha(t_0)=\frac{1}{3}\end{matrix}\right\}$$

Αν $\alpha'(t_0)\neq 0$ *θα έχω* $\alpha(t_0)=\frac{1}{3}$:

$$f\left(\alpha(t_0)\right)=1+\alpha(t_0)^2=1+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{9}{9}+\frac{1}{9}=\frac{10}{9}$$

Οπότε *έχω το σημείο* $\mathrm{A}\left(\frac{1}{3},\frac{10}{9}\right)$

(III) Αν $\alpha,\beta \ge 0$ τότε ισχύει $\alpha+\beta \ge 2\sqrt{\alpha\beta}$

$$\alpha+\beta \ge 2\sqrt{\alpha\beta} \Leftrightarrow \left(\sqrt{\alpha}\right)^2 - 2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} + \left(\sqrt{\beta}\right)^2 \ge 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\right)^2 \ge 0$$

$$\alpha+\beta = 2\sqrt{\alpha\beta} \Leftrightarrow \left(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}=0 \Leftrightarrow \alpha=\beta$$

<u>Έστω: $f(x)=4-f(x), x>0$</u>

$$f(x)=4-f(x) \Leftrightarrow 2f(x)=2\cdot 2 \Leftrightarrow f(x)=2 \Leftrightarrow x^2+1=2 \Leftrightarrow x^2=1$$

$$\overset{x>0}{\Longleftrightarrow} x=1$$

Αν $x\in[0,1)$ θα έχω $e^{f(x)} \ne e^{4-f(x)}$. Οπότε αν $\alpha=e^{f(x)}, \beta=e^{4-f(x)}$ θα έχω:

$$\alpha+\beta > 2\sqrt{\alpha\beta} \Leftrightarrow e^{f(x)}+e^{4-f(x)} > 2\sqrt{e^{f(x)}e^{4-f(x)}} \Leftrightarrow e^{f(x)}+e^{4-f(x)} > 2\sqrt{e^4} \Leftrightarrow$$

$$e^{f(x)}+e^{4-f(x)} > 2e^2 \Rightarrow \int_0^1 \left[e^{f(x)}+e^{4-f(x)}\right]dx > \int_0^1 2e^2 dx \quad \Rightarrow$$

$$\int_0^1 \left[e^{f(x)}+e^{4-f(x)}\right]dx > 2e^2\int_0^1 dx \Rightarrow \int_0^1 \left[e^{f(x)}+e^{4-f(x)}\right]dx > 2e^2$$

Αν $x\in[0,1]$ θα έχω:

$$0\le x\le 1 \Rightarrow 0\le x^2 \le 1 \Rightarrow 1 \le x^2+1 \le 2 \Rightarrow 1 \le f(x) \le 2$$

Θεωρώ την συνάρτηση $g(x)=e^x+e^{4-x}, x\in[1,2]$

$$g'(x)=e^x-e^{4-x}=e^x-e^4e^{-x}=e^{-x}\left(\frac{e^x}{e^{-x}}-e^4\right)=e^{-x}\left(e^{2x}-e^4\right)=$$

$$e^{-x}\left[\left(e^x\right)^2-\left(e^2\right)^2\right]=e^{-x}\left(e^x+e^2\right)\left(e^x-e^2\right)$$

Αν $x\in(1,2)$ θα έχω:

$$x<2 \Rightarrow e^x<e^2 \Rightarrow e^x-e^2<0 \Rightarrow g'(x)<0$$

$$\text{Έχω:}\left\{\begin{array}{l}(\text{I})\ g'(x)<0 \text{ για κάθε } x\in(1,2)\\ (\text{II})\ \text{Η } g \text{ είναι συνεχής στο } [1,2]\end{array}\right\} \text{Οπότε } g \overset{\vee}{\downarrow} [1,2]$$

$$\text{Έχω:}\left\{\begin{array}{l}(\text{I})\ g \overset{\vee}{\downarrow}[1,2]\\ (\text{II})\ \text{Η } g \text{ είναι συνεχής στο } [1,2]\end{array}\right\}$$

Οπότε: $g([1,2])=\left[2e^2, e+e^3\right]=\left[2e^2, e\left(1+e^2\right)\right]$

$$\left\{\begin{array}{l} g(x)\le e\left(1+e^2\right) \\ x\in[1,2] \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} e^x+e^{4-x}\le e\left(1+e^2\right) \\ x\in[1,2] \end{array}\right\}$$

Επειδή $\textit{για κάθε}$ $x\in[0,1]$ $\textit{έχω}$ $f(x)\in[1,2]$ $\textit{θα έχω}$:

$$e^{f(x)}+e^{4-f(x)}\le e\left(1+e^2\right)(1)$$

<u>Αν $x\ne 1$ θα ισχύει $e^x>1+x$</u>

$$e^{e^2}>1+e^2\Rightarrow ee^{e^2}>e\left(1+e^2\right)\Rightarrow e^{1+e^2}>e\left(1+e^2\right)\Rightarrow e\left(1+e^2\right)<e^{1+e^2}\ (2)$$

Απο τις σχέσεις $(1),(2)$ έχω:

$$e^{f(x)}+e^{4-f(x)}\le e\left(1+e^2\right)<e^{1+e^2}\Rightarrow e^{f(x)}+e^{4-f(x)}<e^{1+e^2},x\in[0,1]$$

$$\int_0^1\left[e^{f(x)}+e^{4-f(x)}\right]dx<\int_0^1 e^{1+e^2}dx\Rightarrow\int_0^1\left[e^{f(x)}+e^{4-f(x)}\right]dx<e^{1+e^2}$$

$$(\mathrm{IV})\ \ \mathrm{I}=\int_{\frac12}^{1}\left(\frac{1}{x^2}-2\right)e^{f(x)}dx=\int_{\frac12}^{1}\left(\frac{1}{x^2}-2\right)e^{x^2+1}dx \overset{\left(\frac1x\right)'=-\frac{1}{x^2}}{=}$$

$$=\int_{\frac12}^{1}\left(-\frac1x-2x\right)'e^{x^2+1}dx=-\int_{\frac12}^{1}\left(\frac1x+2x\right)'e^{x^2+1}dx=$$

$$-\left\{\left[\left(\frac1x+2x\right)e^{x^2+1}\right]_{\frac12}^{1}-\int_{\frac12}^{1}\left(\frac1x+2x\right)\left(e^{x^2+1}\right)'dx\right\}=$$

$$-\left[\left(\frac1x+2x\right)e^{x^2+1}\right]_{\frac12}^{1}+\int_{\frac12}^{1}\left(\frac1x+2x\right)2xe^{x^2+1}dx=$$

$$-\left[\left(\frac1x+2x\right)e^{x^2+1}\right]_{\frac12}^{1}+\int_{\frac12}^{1}\left(2+4x^2\right)e^{x^2+1}dx=$$

$$-\left[\left(\frac1x+2x\right)e^{x^2+1}\right]_{\frac12}^{1}+2\int_{\frac12}^{1}e^{x^2+1}dx+2\int_{\frac12}^{1}x2xe^{x^2+1}dx \overset{\left(e^{x^2+1}\right)'=2xe^{x^2+1}}{=}$$

$$-\left[\left(\frac{1}{x}+2x\right)e^{x^2+1}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}+2\int_{\frac{1}{2}}^{1}e^{x^2+1}dx+2\int_{\frac{1}{2}}^{1}x\left(e^{x^2+1}\right)'dx=$$

$$-\left[\left(\frac{1}{x}+2x\right)e^{x^2+1}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}+2\int_{\frac{1}{2}}^{1}e^{x^2+1}dx+2\left\{\left[xe^{x^2+1}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}-\int_{\frac{1}{2}}^{1}e^{x^2+1}(x)'\,dx\right\}=$$

$$-\left[\left(\frac{1}{x}+2x\right)e^{x^2+1}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}+\cancel{2\int_{\frac{1}{2}}^{1}e^{x^2+1}dx}+2\left[xe^{x^2+1}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}-\cancel{2\int_{\frac{1}{2}}^{1}e^{x^2+1}dx}=$$

$$=-\left(3e^2-3e^{\frac{5}{4}}\right)+2\left(e^2-\frac{e^{\frac{5}{4}}}{2}\right)=-3e^2+3e^{\frac{5}{4}}+2e^2-e^{\frac{5}{4}}=2e^{\frac{5}{4}}-e^2$$

44.

$Έστω\ f(x)=\begin{cases}2\alpha x+1, & x\in(-\infty,1)\\ \alpha x^2+x+2, & x\in[1,+\infty)\end{cases}$

$Να\ βρείτε\ την\ τιμη\ του\ \alpha\in\mathbb{R}\ ώστε\ f\uparrow\ στο\ \mathbb{R}$

$\text{Επειδή } f \underset{\wedge}{\uparrow} \text{ στο } \mathbb{R} \text{ θα έχω } f \underset{\wedge}{\uparrow} (-\infty,1). \text{ Επειδή } f \underset{\wedge}{\uparrow} (-\infty,1) \text{ και παραγωγίσιμη}$

$\text{στο } (-\infty,1) \text{ θα έχω } f'(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x \in (-\infty,1)$

$f'(x) = 2\alpha \text{ για κάθε } x \in (-\infty,1).$

$\text{Οπότε } \alpha \geq 0. \text{ Αν } \alpha = 0 \text{ θα έχω } f(x) = 1 \text{ για κάθε } x \in (-\infty,1)$

$\left(\text{Άτοπο γιατί } f \underset{\wedge}{\uparrow} (-\infty,1)\right). \text{Συνεπώς } \alpha > 0$

$\text{Επειδή η } f \underset{\wedge}{\uparrow} \mathbb{R} \text{ για κάθε } x_1 \in (-\infty,1) \text{ και } x_2 \in [1,+\infty) \text{ θα ισχύει}:$

$f(x_1) < f(x_2)$

$\text{Αν } x_1 = 1-t, x_2 = 1+t \text{ με } t > 0 \text{ θα έχω } x_1 \in (-\infty,1) \text{ και } x_2 \in [1,+\infty) \text{ θα έχω}:$

$$f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f(1-t) < f(1+t) \Rightarrow 2\alpha(1-t)+1 < \alpha(1+t)^2+1+t+2 \Rightarrow$$

$$\lim_{t\to 0^+}\left[2\alpha(1-t)+1\right] \leq \lim_{t\to 0^+}\left[\alpha(1+t)^2+1+t+2\right] \Rightarrow 2a+1 \leq a+3 \Rightarrow$$

$$2a-a \leq 3-1 \Rightarrow a \leq 2$$

<u>$\text{Θα αποδείξω αν } \alpha \in (0,2] \text{ η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα}$</u>

$\text{Αν } x_1 < x_2 \text{ διακρίνω τις περιπτώσεις}:$

$$\left\{\begin{matrix} (\mathrm{I})\, x_1 < x_2, x_1, x_2 \in (-\infty,1) \\ (\mathrm{II})\, x_1 < x_2, x_1, x_2 \in [1,+\infty) \\ (\mathrm{III})\, x_1 \in (-\infty,1), x_2 \in [1,+\infty) \end{matrix}\right\}$$

<u>$\Pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\pi\tau\omega\sigma\eta\,(\mathrm{I})$:</u>

$$\left\{\begin{matrix} x_1<x_2 \\ x_1,x_2\in(-\infty,1)\end{matrix}\right\}\xrightarrow{\alpha>0}\left\{\begin{matrix} 2\alpha x_1<2\alpha x_2 \\ x_1,x_2\in(-\infty,1)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix} 2\alpha x_1+1<2\alpha x_2+1 \\ x_1,x_2\in(-\infty,1)\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$f(x_1)<f(x_2)$$

<u>$\Pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\pi\tau\omega\sigma\eta\,(\mathrm{II})$:</u>

$$\left\{\begin{matrix} x_1<x_2 \\ x_1,x_2\in[1,+\infty)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix} x_1^2<x_2^2 \\ x_1<x_2 \\ x_1,x_2\in[1,+\infty)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix} \alpha x_1^2<\alpha x_2^2 \\ x_1<x_2 \\ x_1,x_2\in[1,+\infty)\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{matrix} \alpha x_1^2+x_1<\alpha x_2^2+x_2 \\ x_1,x_2\in[1,+\infty)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix} \alpha x_1^2+x_1+2<\alpha x_2^2+x_2+2 \\ x_1,x_2\in[1,+\infty)\end{matrix}\right\}\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

<u>$\Pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\pi\tau\omega\sigma\eta\,(\mathrm{III})$:</u>

$$x_1\in(-\infty,1)\Rightarrow x_1<1\xrightarrow{\alpha>0}2\alpha x_1<2\alpha\Rightarrow 2\alpha x_1+1<2\alpha+1\Rightarrow f(x_1)<2\alpha+1$$

$$x_2\in[1,+\infty)\Rightarrow x_2\geq 1\Rightarrow\left\{\begin{matrix} x_2^2\geq 1 \\ x_2\geq 1\end{matrix}\right\}\xrightarrow{\alpha>0}\left\{\begin{matrix} \alpha x_2^2\geq\alpha \\ x_2\geq 1\end{matrix}\right\}\Rightarrow\alpha x_2^2+x_2\geq\alpha+1\Rightarrow$$

$$\alpha x_2^2+x_2+2\geq\alpha+1+2\Rightarrow f(x_2)\geq\alpha+3$$

$\acute{E}\chi\omega: 2\alpha+1\leq\alpha+3\Leftrightarrow\alpha\leq 2\,(\mathrm{I}\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota)$

$$f(x_1)<2\alpha+1\leq\alpha+3\leq f(x_2)\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

$\Sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\acute{\omega}\varsigma\ \eta\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \gamma\nu\eta\sigma\acute{\iota}\omega\varsigma\ \alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha\ \sigma\tau o\ \mathbb{R}$

45.

Δίνεται η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *τέτοια ώστε :*

- *η γραφική παράσταση της* f *τέμνει τον y'y άξονα στο e.*
- *ισχύει* $f'(x)\neq 0$ *για κάθε* $x\in\mathbb{R}$ *και*
- $f(e)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5^x-2^x+3}{5^x+3^x+2}$

(α) Ν*α δείξετε ότι υπάρχει* $\xi\in(0,e)$ *τέτοιο ώστε* $f'(\xi)<0$

(β) Ν*α δείξετε ότι* $f'(x)<0$ *για κάθε* $x\in\mathbb{R}$

(γ) Ν*α δείξετε ότι* f *αντιστρέφεται και να λύσετε την εξίσωση*

$$f\left(1-f\left(e^{x^2}\right)\right)=e$$

(δ) Ν*α συγκρίνεται τους αριθμούς* $f\left(\dfrac{1}{3}\right), f\left(\dfrac{1}{e}\right)$

(α) Επειδή η γραφική παράσταση της f τέμνει τον $y'y$ άξονα στο e θα έχω: $f(0)=e$

$$f(e)=\lim_{x\to+\infty}\frac{5^x-2^x+3}{5^x+3^x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{5^x-2^x+3}{5^x}}{\frac{5^x+3^x+2}{5^x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^x+3\left(\frac{1}{5}\right)^x}{1+\left(\frac{3}{5}\right)^x+2\left(\frac{1}{5}\right)^x}=$$

$$\frac{1-\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^x+3\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^x}{1+\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^x+2\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^x}\overset{\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=0,\,0<a<1}{=}\frac{1-0+3\bullet0}{1+0+2\bullet0}=1$$

<u>Έστω για κάθε $x\in(0,e)$ ισχύει $f'(x)>0$.</u> Τότε θα έχω:

$$\left.\begin{cases}(\mathrm{I})\ \text{Η } f \text{ είναι συνεχής στο } [0,e] \text{ ως παραγωγίσιμη}\\ (\mathrm{II})\ f'(x)>0 \text{ για κάθε } x\in(0,e)\end{cases}\right\}\text{Οπότε}: f\underset{\wedge}{\uparrow}[0,e]$$

$$0<e\overset{f\underset{\wedge}{\uparrow}[0,e]}{\Longrightarrow}f(0)<f(e)\Rightarrow e<1\ (\text{ΑΤΟΠΟ})$$

Οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,e)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)\le 0$.

Επειδή $f'(x)\ne 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,e)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)<0$.

(β) Η συνάρτηση f' είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη

$$\text{Έχω}:\left.\begin{cases}(\mathrm{I})\ \text{Η συνάρτηση } f' \text{ είναι συνεχής}\\ (\mathrm{II})\ f'(x)\ne 0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}\end{cases}\right\}$$

Οπότε $f'(x)>0$ *για κάθε* $x\in\mathbb{R}$ *ή* $f'(x)<0$ *για κάθε* $x\in\mathbb{R}$. Ε*πειδή υπάρχει* ξ *με* $f'(\xi)<0$ *θα έχω* $f'(x)<0$ *για κάθε* $x\in\mathbb{R}$.

(γ) Ε*πειδή* $f'(x)<0$ *για κάθε* $x\in\mathbb{R}$ *προκύπτει οτι η* f *είναι γνησίως φθίνουσα στο* $\mathbb{R}$. Σ*υνεπώς η* f *είναι* "$1-1$" *στο* $\mathbb{R}$. Ο*πότε η* f *αντιστρέφεται.*

$$f\left(1-f\left(e^{x^2}\right)\right)=e\overset{f(0)=e}{\Longleftrightarrow} f\left(1-f\left(e^{x^2}\right)\right)=f(0)\overset{f\ "1-1"}{\Longleftrightarrow}1-f\left(e^{x^2}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$f\left(e^{x^2}\right)=1\overset{f(e)=1}{\Longleftrightarrow} f\left(e^{x^2}\right)=f(e)\overset{f\ "1-1"}{\Longleftrightarrow} e^{x^2}=e\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=\pm1$$

(γ)

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Α}\nu\ \alpha,\beta\ \textit{ομόσημοι τότε ισχύει η ισοδυναμία}:\\ \qquad\qquad \alpha>\beta\Leftrightarrow\dfrac{1}{\alpha}<\dfrac{1}{\alpha}\end{array}}$$

$$3>e\Leftrightarrow\frac{1}{3}<\frac{1}{e}\overset{f\downarrow\mathbb{R}}{\Longleftrightarrow}f\left(\frac{1}{3}\right)>f\left(\frac{1}{e}\right)$$

46.

$$\boxed{\text{Ν}\alpha\ \textit{υπολογιστεί το ολοκλήρωμα}\ \int_0^4\left|x^3-2x^2-x+2\right|dx}$$

$$x^3-2x^2-x+2=x^2(x-2)-(x-2)=(x-2)\left(x^2-1\right)=(x-2)(x-1)(x+1)$$

$\Theta\varepsilon\omega\rho\acute{\omega}\ \tau\eta\nu\ \delta\varepsilon\upsilon\tau\varepsilon\rho o\beta\acute{\alpha}\theta\mu\iota\alpha\ \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta:$

$$(x-2)(x-1)=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x-2=0 \\ \acute{\eta} \\ x-1=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x=2 \\ \acute{\eta} \\ x=1 \end{matrix}\right\}$$

x	$-\infty$	1		2	$+\infty$
$(x-1)(x-2)$	+	0	−	0	+

$\text{Αν } 0 \le x \le 1 \text{ θα έχω}:$

$$\left\{\begin{matrix}(x-2)(x-1)\ge 0\\ x\ge 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix}(x-2)(x-1)\ge 0\\ x+1\ge 1>0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix}(x-2)(x-1)\ge 0\\ x+1>0\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$(x-2)(x-1)(x+1)\ge 0 \Rightarrow x^3-2x^2-x+2\ge 0 \Rightarrow$$

$$\left|x^3-2x^2-x+2\right| = x^3-2x^2-x+2$$

$\text{Οπότε}: \boxed{\left|x^3-2x^2-x+2\right| = x^3-2x^2-x+2 \text{ για κάθε } x\in[0,1]}$

$\text{Αν } 1 \le x \le 2 \text{ θα έχω}:$

$$\left\{\begin{matrix}(x-2)(x-1)\le 0\\ x\ge 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix}(x-2)(x-1)\le 0\\ x+1\ge 1>0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix}(x-2)(x-1)\le 0\\ x+1>0\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$(x-2)(x-1)(x+1)\le 0 \Rightarrow x^3-2x^2-x+2\le 0 \Rightarrow$$

$$\left|x^3-2x^2-x+2\right| = -\left(x^3-2x^2-x+2\right)$$

$\text{Οπότε}: \boxed{\left|x^3-2x^2-x+2\right| = -\left(x^3-2x^2-x+2\right) \text{ για κάθε } x\in[1,2]}$

$\text{Αν } 2 \le x \le 4 \text{ θα έχω}:$

$$\begin{Bmatrix} (x-2)(x-1) \ge 0 \\ x \ge 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} (x-2)(x-1) \ge 0 \\ x+1 \ge 1 > 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} (x-2)(x-1) \ge 0 \\ x+1 > 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$(x-2)(x-1)(x+1) \ge 0 \Rightarrow x^3 - 2x^2 - x + 2 \ge 0 \Rightarrow$$

$$\left|x^3 - 2x^2 - x + 2\right| = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

$\text{Οπότε}: \boxed{\left|x^3 - 2x^2 - x + 2\right| = x^3 - 2x^2 - x + 2 \text{ για κάθε } x \in [2,4]}$

$$\int_0^4 \left|x^3 - 2x^2 - x + 2\right| dx =$$

$$\int_0^1 \left|x^3 - 2x^2 - x + 2\right| dx + \int_1^2 \left|x^3 - 2x^2 - x + 2\right| dx + \int_2^4 \left|x^3 - 2x^2 - x + 2\right| dx =$$

$$\int_0^1 \left(x^3 - 2x^2 - x + 2\right) dx - \int_1^2 \left(x^3 - 2x^2 - x + 2\right) dx + \int_2^4 \left(x^3 - 2x^2 - x + 2\right) dx =$$

$$\left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^1 - \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_1^2 + \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_2^4 =$$

$$\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) - 0 - \left[\left(4 - \frac{16}{3} - 2 + 4\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 2\right)\right] +$$

$$\left(64 - \frac{128}{3} - \cancel{8} + \cancel{8}\right) - \left(4 - \frac{16}{3} - 2 + 4\right) =$$

$$\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) - \left(6 - \frac{16}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) + \left(64 - \frac{128}{3}\right)$$

$$-\left(6 - \frac{16}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) - 2\left(6 - \frac{16}{3}\right) + \frac{192}{3} - \frac{128}{3} =$$

$$2\left(\frac{3}{12} - \frac{8}{12} - \frac{6}{12} + \frac{24}{12}\right) - 2\left(\frac{18}{3} - \frac{16}{3}\right) + \frac{64}{3} = 2 \bullet \frac{13}{12} - 2\frac{2}{3} + \frac{64}{3} =$$

$$\frac{13}{6} - \frac{4}{3} + \frac{64}{3} = \frac{13}{6} + \frac{60}{3} = \frac{13}{6} + 20 = \frac{13}{6} + \frac{120}{6} = \frac{133}{6}$$

47.

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f\left(x\right)=\dfrac{e^{x}+a-1}{x^{2}+1}$, $x\in\mathbb{R}$ και $g\left(x\right)=\dfrac{e^{x}-1}{e^{x}+1}$, $x\in\mathbb{R}$ όπου $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε $\ln x\leq\alpha x-\alpha$ για κάθε $x>0$.

α. Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$

β. Να αποδείξετε ότι η g αντιστρέφεται και να βρείτε την g^{-1}.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $f\left(x\right)+\sqrt{x}=g\left(x\right)$

δ. Να αποδείξετε ότι $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{g\left(x\right)}{f\left(x\right)}dx<1$

$\alpha.\ \ln x \le \alpha x - \alpha \Leftrightarrow \ln x - \alpha x + \alpha \le 0 \text{ για κάθε } x \in (0,+\infty)$

Θεωρώ την συνάρτηση $h(x) = \ln x - \alpha x + \alpha,\ x \in (0,+\infty)$

$h(1) = \ln 1 - \alpha + \alpha = 0$

Έχω $h(x) \le 0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$. Τότε θα έχω:

$h(x) \le h(1)$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$. Συνεπώς η συνάρτηση h παρουσιάζει μέγ τιμή στην θέση $x_0 = 1$ τον αριθμό $h(1) = 0$.

Έχω: $h'(x) = \dfrac{1}{x} - \alpha,\ x \in (0,+\infty)$

$$\left\{\begin{array}{l} (\mathrm{I})\ \text{Το σημείο } x_0 = 1 \text{ είναι εσωτερικό σημείο του διαστήματος } (0,+\infty) \\ (\mathrm{II})\ \text{Το σημείο } x_0 = 1 \text{ είναι θέση τοπικού ακρότατου} \\ (\mathrm{III})\ \text{Η συνάρτηση } h \text{ είναι παραγωγίσιμη στη θέση } x_0 = 1 \end{array}\right\}$$

Οπότε η συνάρτηση h ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος του Fermat στο σημείο $x_0 = 1$. Οπότε θα έχω:

$h'(1) = 0 \Leftrightarrow 1 - \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$

Συνεπώς θα έχω τη συνάρτηση $f(x) = \dfrac{e^x + a - 1}{x^2+1} = \dfrac{e^x + 1 - 1}{x^2+1} = \dfrac{e^x}{x^2+1}$

$\beta.\ g(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} = \dfrac{(e^x+1) - 1 - 1}{e^x+1} = \dfrac{e^x+1}{e^x+1} - \dfrac{2}{e^x+1} = 1 - \dfrac{2}{e^x+1}$

$$\boxed{\left(\frac{1}{F(x)}\right)' = -\frac{F'(x)}{F^2(x)},\ F(x) \ne 0}$$

$$g'(x) = -2\frac{-\left(e^x+1\right)'}{\left(e^x+1\right)^2} = \frac{2e^x}{\left(e^x+1\right)^2} > 0$$

Επειδή $g'(x) > 0$ *για κάθε* $x \in \mathbb{R}$ *η* g *είναι γνησίως αύξουσα. Συνεπώς η* g *είναι* "1−1" *συνεπώς αντιστρέφεται.*

$$y = \frac{e^x-1}{e^x+1} \Leftrightarrow y\left(e^x+1\right) = e^x - 1 \Leftrightarrow ye^x + y = e^x - 1 \Leftrightarrow ye^x - e^x = -y - 1 \Leftrightarrow$$

$$-e^x(1-y) = -(y+1) \Leftrightarrow e^x(1-y) = y + 1 (1)$$

Έστω $: 1 - y = 0 \Leftrightarrow y = 1$

Αν $y = 1$ *απο την σχέση* (1) *θα έχω*:

$0e^x = 0$ (ΑΤΟΠΟ)

Συνεπώς $: 1 - y \neq 0 \Leftrightarrow y \neq 1$

$$\left\{\begin{matrix} e^x(1-y) = y+1 \\ y \neq 1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \dfrac{e^x(1-y)}{1-y} = \dfrac{y+1}{1-y} \\ y \neq 1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} e^x = \dfrac{y+1}{1-y} \\ y \neq 1 \end{matrix}\right\}$$

Θα πρέπει: $\left\{\begin{matrix} \dfrac{y+1}{1-y} > 0 \\ y \neq 1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} (1+y)(1-y) > 0 \\ y \neq 1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} 1 - y^2 > 0 \\ y \neq 1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$

$$\left\{\begin{matrix} 1 > y^2 \\ y \neq 1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} y^2 < 1 \\ y \neq 1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \sqrt{y^2} < 1 \\ y \neq 1 \end{matrix}\right\} \overset{\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{matrix} |y| < 1 \\ y \neq 1 \end{matrix}\right\} \overset{|x|<\theta \Leftrightarrow -\theta<x<\theta, \theta\geq 0}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left\{\begin{matrix} -1 < y < 1 \\ y \neq 1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow -1 < y < 1$$

Άρα θα έχω:

$$\left.\begin{cases} e^x=\dfrac{y+1}{1-y} \\ -1<y<1 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} x=\ln\dfrac{y+1}{1-y} \\ -1<y<1 \end{cases}\right\}$$

Οπότε $D_{g^{-1}}=(-1,1)$

$$g^{-1}:(-1,1)\to\mathbb{R},\ g^{-1}(x)=\ln\frac{x+1}{1-x}$$

$$\gamma.\ f'(x)=\frac{(e^x)'(x^2+1)-e^x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=\frac{e^x(x^2+1)-2xe^x}{(x^2+1)^2}=\frac{e^x(x^2-2x+1)}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}$$

Αν $x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ *θα έχω*:

$$\left.\begin{cases} x\neq 1 \\ e^x>0 \\ x^2\geq 0 \end{cases}\right\}\Rightarrow \left.\begin{cases} x-1\neq 0 \\ e^x>0 \\ x^2\geq 0 \end{cases}\right\}\Rightarrow \left.\begin{cases} (x-1)^2>0 \\ e^x>0 \\ x^2+1\geq 1>0 \end{cases}\right\}\Rightarrow \left.\begin{cases} (x-1)^2>0 \\ e^x>0 \\ x^2+1>0 \end{cases}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{cases} (x-1)^2>0 \\ e^x>0 \\ (x^2+1)^2>0 \end{cases}\right\}\Rightarrow \frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}>0\Rightarrow f'(x)>0$$

$$\text{Έχω}:\left.\begin{cases} (\mathrm{I})\ f'(x)>0 \ \text{για κάθε}\ x\in(-\infty,1) \\ (\mathrm{II})\ f'(x)>0 \ \text{για κάθε}\ x\in(1,+\infty) \\ (\mathrm{III})\ \text{Η συνάρτηση}\ f\ \text{είναι συνεχής στο σημείο}\ x_0=1 \end{cases}\right\}$$

Οπότε *η* f *είναι γνησίως αύξουσα στο* $\mathbb{R}$

$Έχω: f(x)+\sqrt{x}=g(x)(2)$

$Θα\ πρέπει\ x\geq 0: x\geq 0 \overset{f\uparrow\mathbb{R}}{\Longrightarrow} f(x)\geq f(0) \overset{f(0)=1}{\Longrightarrow} f(x)\geq 1$

$x\geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}\geq 0$

$$\left.\begin{cases} f(x)\geq 1 \\ \sqrt{x}\geq 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow f(x)+\sqrt{x}\geq 1$$

$$\left.\begin{cases} e^x>0 \\ 1>0 \end{cases}\right\} \Rightarrow e^x+1>0 \Rightarrow \frac{2}{e^x+1}>0 \Rightarrow -\frac{2}{e^x+1}<0 \Rightarrow 1-\frac{2}{e^x+1}<1 \Rightarrow g(x)<1$$

$Απο\ την\ (2)\ θα\ έχω:$

$$\left.\begin{cases} f(x)+\sqrt{x}=g(x) \\ f(x)+\sqrt{x}\geq 1 \\ g(x)<1 \end{cases}\right\} (\text{ΑΤΟΠΟ}).Άρα\ η\ εξίσωση\ (2)\ δεν\ έχει\ λύση$$

$δ.Αν\ x\in(0,1]\ θα\ έχω:$

$$x>0 \overset{f\uparrow\mathbb{R}}{\Longrightarrow} f(x)>f(0) \Rightarrow f(x)>1 \Rightarrow \frac{1}{f(x)}<1$$

$$x\in(0,1] \Rightarrow x>0 \Rightarrow e^x>1 \Rightarrow e^x-1>0 \Rightarrow \frac{e^x-1}{e^x+1}>0 \Rightarrow g(x)>0$$

$Συνεπώς\ 0<g(x)<1\ για\ κάθε\ x\in(0,1]$

$$Έχω: \left.\begin{cases} 0<g(x)<1 \\ 0<\dfrac{1}{f(x)}<1 \\ x\in(0,1] \end{cases}\right\} \Rightarrow \frac{g(x)}{f(x)}<1\ για\ κάθε\ x\in(0,1]$$

$$Οπότε: \int_0^1 \frac{g(x)}{f(x)}dx<\int_0^1 dx \Rightarrow \int_0^1 \frac{g(x)}{f(x)}dx<1$$

48.

$Έστω\ f:[0,1]\to\mathbb{R}\ συνεχής\ που\ ικανιοιεί\ την\ σχέση\ \int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}$

$Να\ δειχτεί\ ότι\ υπάρχει\ x_0\in(0,1)\ με\ f(x_0)=x_0$

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$ τότε η συνάρτηση $G(x)=\int_0^x f(t)dt$ είναι αρχική συνάρτση της f. Συνεπώς υπάρχει αρχική συνάρτηση της f στο $[0,1]$. Έστω F αρχική συνάρτηση της f

$$\text{Έχω}:\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\ \mathrm{H}\ f \text{ είναι συνεχής στο } [0,1] \\ (\mathrm{II})\ \mathrm{H}\ F \text{ είναι αρχική συνάρτηση της } f\end{array}\right\}$$

Τότε απο το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού θα έχω:

$$\int_0^1 f(x)dx=\left[F(x)\right]_0^1 \overset{\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}}{\Longrightarrow} F(1)-F(0)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow F(1)-\frac{1}{2}=F(0)$$

Θεωρώ την συνάρτηση $g(x)=F(x)-\dfrac{x^2}{2}, x\in[0,1]$

$$g'(x)=F'(x)-\left(\frac{x^2}{2}\right)' \overset{F'(x)=f(x)}{=} f(x)-x, x\in[0,1]$$

$$\left\{\begin{array}{l} g(0)=F(0) \\ g(1)=F(1)-\dfrac{1}{2} \\ F(1)-\dfrac{1}{2}=F(0)\end{array}\right\}\Rightarrow g(0)=g(1)$$

$$\text{Έχω}:\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\mathrm{H}\ g \text{ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα } [0,1] \text{ ως πράξεις} \\ \text{συνεχών συναρτήσεών} \\ (\mathrm{II})\mathrm{H}\ g \text{ είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα } (0,1) \text{ ως} \\ \text{πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεών} \\ (\mathrm{III})\, g(0)=g(1)\end{array}\right\}$$

Οπότε η συνάρτηση ικανιοιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο κλειστό διάστημα $[0,1]$. Οπότε υπαρχει ένα τουλάχιστον $x_0\,(0,1)$ τέτοιο ώστε $g'(x_0)=0$

$$\left\{\begin{array}{l} g'(x_0)=0 \\ x_0\,(0,1)\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} f(x_0)-x_0=0 \\ x_0\,(0,1)\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} f(x_0)=x_0 \\ x_0\,(0,1)\end{array}\right\}$$

49.

$N\alpha$ $\beta\rho\varepsilon\acute{\iota}\tau\varepsilon$ $\tau\eta\nu$ $\mu o\rho\varphi\acute{\eta}$ $\tau\eta\varsigma$ $\pi\alpha\rho\alpha\gamma\omega\gamma\acute{\iota}\sigma\iota\mu\eta\varsigma$ $\sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\varsigma$ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*$
$\gamma\iota\alpha$ $\tau\eta\nu$ $o\pi o\acute{\iota}\alpha$ $\iota\sigma\chi\acute{\varepsilon}\iota$:
$f(x+y)=f(x)f(y), x,y\in\mathbb{R}$

$\acute{E}\chi\omega: f\left(x\right)\neq 0 \; \gamma\iota\alpha \; \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon \; x\in\mathbb{R}$

Αν $x=y=0$ $\theta\alpha \; \acute{\varepsilon}\chi\omega$:

$$f\left(0+0\right)=f\left(0\right)f\left(0\right)\Leftrightarrow f^{2}\left(0\right)-f\left(0\right)=0\Leftrightarrow f\left(0\right)\left[f\left(0\right)-1\right]=0\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{cases} f\left(0\right)=0\left(\acute{A}\tau o\pi o \; \gamma\iota\alpha\tau\acute{\iota} \; f\left(0\right)\neq 0\right) \\ \acute{\eta} \\ f\left(0\right)-1=0 \end{cases}\right\}\Leftrightarrow f\left(0\right)=1$$

Ε$\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}$ η $\sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta$ $\varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota$ $\pi\alpha\rho\alpha\gamma\omega\gamma\acute{\iota}\sigma\iota\mu\eta$ $\sigma\tau o$ $\sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o$ $x_0=0$ $\theta\alpha \; \acute{\varepsilon}\chi\omega$:

$$f'\left(0\right)=\lim_{x\to 0}\frac{f\left(x\right)-f\left(0\right)}{x}\overset{f(0)=1}{\Longrightarrow}f'\left(0\right)=\lim_{x\to 0}\frac{f\left(x\right)-1}{x}$$

$$f'\left(x_0\right)=\lim_{x\to 0}\frac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)}{h}=\lim_{x\to 0}\frac{f\left(x_0\right)f\left(h\right)-f\left(x_0\right)}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x_0\right)\left[f\left(h\right)-1\right]}{h}=f\left(x_0\right)f'\left(0\right)$$

Ο$\pi\acute{o}\tau\varepsilon$ $f'\left(x\right)=f\left(x\right)f'\left(0\right)\Leftrightarrow f'\left(x\right)-f\left(x\right)f'\left(0\right)=0 \overset{\substack{\Pi o\lambda\lambda\alpha\pi\lambda\alpha\sigma\iota\acute{\alpha}\zeta\omega \; \kappa\alpha\iota \; \tau\alpha \\ \delta\upsilon o \; \mu\acute{\varepsilon}\lambda\eta \; \tau\eta\varsigma \; \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta\varsigma \\ \mu\varepsilon \; \tau o \; e^{-f'(0)x}}}{\Longleftrightarrow}$

$$e^{-f'(0)x}f'\left(x\right)-e^{-f'(0)x}f\left(x\right)f'\left(0\right)=0\Leftrightarrow f'\left(x\right)e^{-f'(0)x}+f\left(x\right)\left[e^{-f'(0)x}\right]'=0$$

$\left[f\left(x\right)e^{-f'(0)x}\right]'=0$ $\gamma\iota\alpha \; \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon \; x\in\mathbb{R}$. $\Sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\acute{\omega}\varsigma \; \upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota \; c\in\mathbb{R} \; \tau\acute{\varepsilon}\tau o\iota o$ $\acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon \; \nu\alpha \; \iota\sigma\chi\acute{\varepsilon}\iota$:

$$f(x)e^{-f'(0)x}=c \Leftrightarrow f(x)e^{-f'(0)x}e^{f'(0)x}=e^{f'(0)x}c \Leftrightarrow f(x)=e^{f'(0)x}c$$

$$f(x)=e^{f'(0)x}c \Rightarrow f'(x)=e^{f'(0)x}f'(0)c \xRightarrow{x=0} f'(0)=e^{0}f'(0)c \Leftrightarrow$$

$$f'(0)=f'(0)c \Leftrightarrow f'(0)c-f'(0)=0 \Leftrightarrow f'(0)(c-1)=0 \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{matrix} f'(0)=0 \\ \acute{\eta} \\ c-1=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} f'(0)=0 \\ \acute{\eta} \\ c=1 \end{matrix}\right\}$$

<u>Αν $f'(0)=0$:</u>

$$f(x)=e^{f'(0)x}c=f(x)=e^{0}c=c$$

$$f(x)=c \xRightarrow{x=0} f(0)=c \Rightarrow c=1$$

Οπότε: $f(x)=e^{f'(0)x}$

<u>Αν $c=1$:</u> $f(x)=e^{f'(0)x}c=e^{f'(0)x}$

Οπότε: $\boxed{f(x)=e^{\alpha x}}$

<u>Α*ντίστροφο*</u>

$$f(x+y)=e^{\alpha(x+y)}=e^{\alpha x+\alpha y}=e^{\alpha x}e^{\alpha y}=f(x)f(y)$$

$f(x)=e^{\alpha x}\neq 0$ *για κάθε* $x\in\mathbb{R}$

Η *συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων* αx *και* e^{x}.

50.

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

Γ_1. Ν*α αποδείξετε ότι η* f *είναι περιττή στο* $\mathbb{R}$

Γ_2. Ν*α αποδείξετε ότι η* $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$

Γ_3. Ν*α αποδείξετε ότι η καμπύλη κάμπτεται στο σημείο της* $\mathrm{O}(0,0)$

Γ_4. Ν*α αποδείξετε ότι*:

$$\alpha.\int_{-2}^{2} f(x)\,dx=0 \ \textit{και}\ \beta.\int_{0}^{2} f(x)\,dx<2$$

Γ_5. Ν*α αποδείξετε ότι υπάρχει* $r\in(0,1)$, *ώστε*:

$$\frac{\int_{-2}^{0} f(x)\,dx+2}{r-1}=\frac{\int_{0}^{2} f(x)\,dx-2}{r^3}$$

$$\Gamma_1.\ D_f=\left\{x\in\mathbb{R}: x^2+1\geq 0,\ x+\sqrt{x^2+1}\right\}$$

$$x^2\geq 0\Rightarrow x^2+1\geq 1>0\Rightarrow x^2+1>0$$

$$1>0\Rightarrow x^2+1>x^2\Rightarrow \sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}\overset{\sqrt{\alpha^2}=|\alpha|}{\Longrightarrow}\sqrt{x^2+1}>|x|\overset{|\alpha|=|-\alpha|}{\Longrightarrow}\sqrt{x^2+1}>|-x|$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+1}>|-x|\geq -x\Rightarrow \sqrt{x^2+1}>-x\Rightarrow \sqrt{x^2+1}+x>0 \qquad \boxed{|\alpha|\geq\alpha}$$

$$\text{Ο}\pi\acute{o}\tau\varepsilon: D_f=\mathbb{R}$$

$$x\in D_f\Rightarrow x\in\mathbb{R}\Rightarrow -x\in\mathbb{R}\Rightarrow -x\in D_f$$

$$f(x)+f(-x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+\ln\left(-x+\sqrt{(-x)^2+1}\right)=$$

$$\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)+\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\ln\left[\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\right]=$$

$$\ln\left[\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-x^2\right]=\ln\left(x^2+1-x^2\right)=\ln 1=0$$

$$f(x)+f(-x)=0\Rightarrow f(-x)=-f(x)$$

$$\left\{\begin{array}{l}(\text{I})\ x\in D_f\Rightarrow -x\in D_f\\ (\text{II})\ f(-x)=-f(x)\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in D_f\end{array}\right\}$$

$$\text{Ο}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \eta\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{\eta}$$

$$\Gamma_2.\ \boxed{\left[\ln F(x)\right]'=\frac{F'(x)}{F(x)},F(x)>0},\ \boxed{\sqrt{F(x)}=\frac{F'(x)}{2\sqrt{F(x)}},F(x)>0}$$

$$f'(x)=\frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{1+\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{1+\frac{\left(x^2+1\right)'}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=$$

$$\frac{\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{\cancel{\sqrt{x^2+1}+x}}{\sqrt{x^2+1}\cancel{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}>0$$

Επειδή $f'(x)>0$ *για κάθε* $x\in\mathbb{R}$ *η* f *είναι γνησίως αύξουσα στο* $\mathbb{R}$

$$\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\ \mathrm{H}\ f\ \textit{είναι γνησίως αύξουσα στο}\ (-\infty,+\infty)\\ (\mathrm{II})\ \mathrm{H}\ f\ \textit{είναι συνεχής στο}\ (-\infty,+\infty)\ \textit{συναρτήσεων ως πράξεις}\\ \textit{συνεχών}\end{array}\right\}$$

$$f\left((-\infty,+\infty)\right)=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)$$

Θέτω: $t=\sqrt{x^2+1}+x$

<u>Αν $x\to-\infty$</u>

$x\to-\infty\Rightarrow x<0\Rightarrow|x|=-x$

$$t=\sqrt{x^2+1}+x=\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+x=\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x\overset{\sqrt{x^2}=|x|}{=}|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x=$$

$$\overset{\substack{x\to-\infty\Rightarrow\\ x<0\Rightarrow|x|=-x}}{=}-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x=x\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty}x=-\infty,\ \lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)=-\sqrt{1+\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}}+1=-\sqrt{1+0}+1=0$$

$$t=\sqrt{x^2+1}+x=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+1}-x}=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}-x}=$$

$$\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-x}\overset{\sqrt{x^2}=|x|}{=}\frac{1}{|x|\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-x}\overset{\substack{x\to-\infty\Rightarrow\\ x<0\Rightarrow|x|=-x}}{=}\frac{1}{-x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-x}=-\frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1}$$

$$\lim_{x\to-\infty} t = -\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{1+\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}}+1} = -0\frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) = \lim_{t\to0^+}\ln t = -\infty$$

$\text{Αν } x\to+\infty$

$$x\to+\infty \Rightarrow x>0 \Rightarrow |x| = x$$

$$t = \sqrt{x^2+1}+x = \sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+x = \sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x \overset{\sqrt{x^2}=|x|}{=} |x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x =$$

$$\overset{\substack{x\to+\infty\Rightarrow \\ x>0\Rightarrow|x|=x}}{=} x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x = x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} t = \lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{1+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}}+1\right) = (+\infty)\left(\sqrt{1+0}+1\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) = \lim_{t\to+\infty}\ln t = +\infty$$

$$\text{Οπότε}: f\left((-\infty,+\infty)\right) = \left(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) = (-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$$

$\Gamma_3.$ $\boxed{\left[\frac{1}{F(x)}\right]' = -\frac{F'(x)}{F^2(x)}, F(x)>0}$, $\boxed{\sqrt{F(x)} = \frac{F'(x)}{2\sqrt{F(x)}}, F(x)>0}$

$$f''(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)' = -\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2} = -\frac{\frac{\left(x^2+1\right)'}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = -\frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} =$$

$$= -\frac{x}{\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}\left(x^2+1\right)} = -\frac{x}{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\text{Αν } x<0 \Rightarrow -x>0 \Rightarrow -\frac{x}{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}>0 \Rightarrow f''(x)>0$$

Επειδή $f''(x)>0$ *για κάθε* $x\in(-\infty,0)$ *η* f *είναι κυρτή στο* $(-\infty,0)$

$\text{Αν } x>0 \Rightarrow -x<0 \Rightarrow -\dfrac{x}{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}<0 \Rightarrow f''(x)<0$

$\text{Επειδή } f''(x)<0 \text{ για κάθε } x\in(0,+\infty) \text{ η } f \text{ είναι κοίλη στο } (0,+\infty)$

$$\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\,\text{Η } f \text{ είναι κυρτή στο } (-\infty,0)\\(\mathrm{II})\,\text{Η } f \text{ είναι κοίλη στο } (0,+\infty)\\(\mathrm{III})\,\text{Υπάρχει εφαπτομένη της } C_f \text{ στο σημείο } \left(0,f(0)\right) \text{γιατι}\\ \text{η } f \text{ παραγωγίσιμη στην θέση } x_0=0\end{array}\right\}$$

$\text{Οπότε το σημείο } \left(\left(0,f(0)\right)\right) \overset{f(0)=0}{\equiv} (0,0) \text{ είναι σημείο καμπής}$

$\Gamma_4.\ \displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\,dx=\int_{-2}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{2} f(x)\,dx$

$\text{Το ολοκήρωμα } \displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)\,dx:$

$\text{Θέτω}: x=-t$

$x=0:-t=0 \Leftrightarrow t=0$

$x=-2:-t=-2 \Leftrightarrow t=2$

$dx=(-t)'\,dt=-dt$

$$\int_{-2}^{0} f(x)\,dx=\int_{2}^{0} f(-t)(-dt)=-\int_{2}^{0} f(-t)\,dt=-\left(-\int_{0}^{2} f(-t)\,dt\right)$$

$$\int_{0}^{2} f(-t)\,dt \overset{\substack{\text{Επειδή } f \text{ περττή}\\ \text{θα έχω } f(-t)=-f(t)}}{=} \int_{0}^{2}\left(-f(t)\right)dt=-\int_{0}^{2} f(t)\,dt=-\int_{0}^{2} f(x)\,dx$$

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx=\int_{-2}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{2} f(x)\,dx=-\int_{0}^{2} f(x)\,dx+\int_{0}^{2} f(x)\,dx=0$$

$\text{Θεωρώ την συνάρτηση } h(x)=f(x)-x,\ x\in[0,2]$

$$h'(x)=f'(x)-1=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-1=\frac{1-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$$

$\text{Αν } x\in(0,2):$

$x^2>0 \Rightarrow x^2+1>1 \Rightarrow \sqrt{x^2+1}>1 \Rightarrow 1<\sqrt{x^2+1} \Rightarrow 1-\sqrt{x^2+1}<0 \Rightarrow$

$h'(x)<0$

Αν $x \in (0,2)$:

$x^2 > 0 \Rightarrow x^2 + 1 > 1 \Rightarrow \sqrt{x^2+1} > 1 \Rightarrow 1 < \sqrt{x^2+1} \Rightarrow 1 - \sqrt{x^2+1} < 0 \Rightarrow$
$h'(x) < 0$

$$\left\{\begin{array}{l} (\mathrm{I})\ \text{Η } h \text{ είναι συνεχής στο } [0,2] \\ (\mathrm{II})\ h'(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in (0,2) \end{array}\right\}$$

Οπότε $h \overset{\vee}{\downarrow} [0,2]$. Αν $x \in (0,2]$ θα έχω:

$$x \in (0,2] \Rightarrow x > 0 \xRightarrow{h \overset{\vee}{\downarrow}[0,2]} h(x) < h(0) \Rightarrow h(x) < f(0) \Rightarrow h(x) < 0$$

$$\left\{\begin{array}{l} h(x) < 0 \\ x \in (0,2] \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f(x) - x < 0 \\ x \in (0,2] \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f(x) < x \\ x \in (0,2] \end{array}\right\} \Rightarrow \int_0^2 f(x)dx < \int_0^2 xdx \Rightarrow$$

$$\int_0^2 f(x)dx < \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 \Rightarrow \int_0^2 f(x)dx < \frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2} \Rightarrow \int_0^2 f(x)dx < 2$$

Γ_5. Έχω: $\int_{-2}^{0} f(x)dx = -\int_0^2 f(x)dx$

$$\frac{\int_{-2}^{0} f(x)dx + 2}{r-1} = \frac{\int_0^2 f(x)dx - 2}{r^3} \overset{\int_{-2}^{0} f(x)dx = -\int_0^2 f(x)dx}{\Longleftrightarrow} \frac{-\int_0^2 f(x)dx + 2}{r-1} = \frac{\int_0^2 f(x)dx - 2}{r^3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-\left(\int_0^2 f(x)dx - 2\right)}{r-1} = \frac{\int_0^2 f(x)dx - 2}{r^3} \Leftrightarrow$$

$$\cancel{\left(\int_0^2 f(x)dx-2\right)}\frac{-1}{r-1}=\cancel{\left(\int_0^2 f(x)dx-2\right)}\frac{1}{r^3}\overset{\int_0^2 f(x)dx-2\neq 0}{\Leftrightarrow}\frac{-1}{r-1}=\frac{1}{r^3}\Leftrightarrow -r^3=r-1$$

$$\left(\int_0^2 f(x)dx<2\Rightarrow\int_0^2 f(x)dx-2<0\Rightarrow\int_0^2 f(x)dx-2\neq 0\right)$$

$r^3+r-1=0$

Θεωρώ την συνάρτηση $g(x)=x^3+x-1$

$g(0)g(1)=-1\bullet 1=-1<0$

$$\left\{\begin{matrix}(\mathrm{I})\ \mathrm{H}\ g\ \textit{είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα}\ [0,1]\ \textit{ως πολυνυμική}\\(\mathrm{II})\ g(0)g(1)<0\end{matrix}\right\}$$

Ο*πότε η g ικανοποιεί τις προυποθέσεις του Bolzano στο κλειστό διάστημα* $[0,1]$. *Άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον* $r\in(0,1)$ *τέτοιο ώστε* $g(r)=0$

$$\left\{\begin{matrix}g(r)=0\\r\in(0,1)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}r^3+r-1=0\\r\in(0,1)\end{matrix}\right\}$$