51.

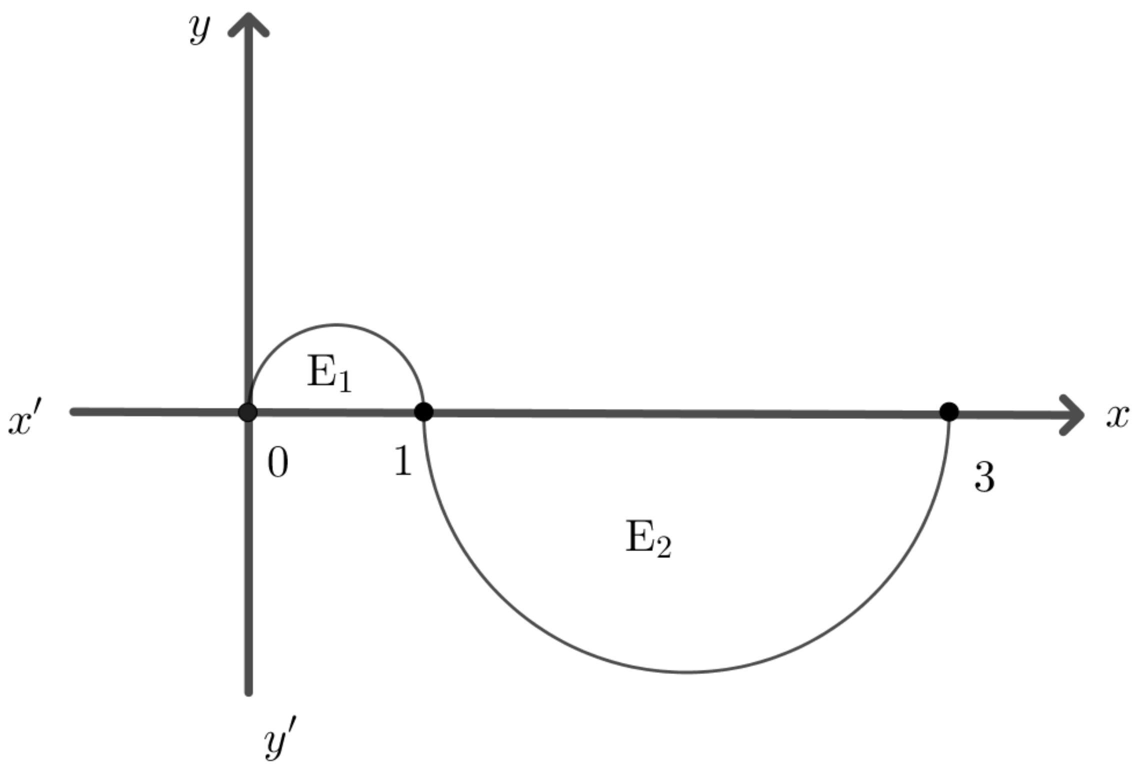
$\Pi\alpha\rho\alpha\kappa\acute{\alpha}\tau\omega$ $\beta\lambda\acute{\varepsilon}\pi o\upsilon\mu\varepsilon$ $\tau\eta\nu$ $\gamma\rho\alpha\varphi\iota\kappa\acute{\eta}$ $\pi\alpha\rho\acute{\alpha}\sigma\tau\alpha\sigma\eta$ $\mu\iota\alpha\varsigma$ $\sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi o\acute{\upsilon}\varsigma$ $\sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\varsigma$ $f:[0,3]\to\mathbb{R}$.

α. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\int_0^3 f(x)dx$ και $f\left(\frac{1}{2}\right)$

β. Αν F είναι μια αρχική συνάρτηση της f στο $[0,3]$ τότε:

i. Να εξετάσετε αν η F μπορεί να είναι πολυωνυμική συνάρτηση $3^{ου}$ βαθμού

ii. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 2^+}\left[\left(F(x)-F(2)\right)^3 e^{\frac{1}{x-2}}\right]=-2$



$Έστω\ \mathrm{E}_1$ *το εμβαδό χωρίου που περικλείεται απο την* C_f *τον άξονα*

$x'x$ *και τις ευθείες* $x=0$ *και* $x=1$. Τότε *θα έχω* $\mathrm{E}_1=\int_0^1 f(x)dx$

α.Έστω E_2 *το εμβαδό χωρίου που περικλείεται απο την* C_f *τον άξονα*

$x'x$ *και τις ευθείες* $x=1$ *και* $x=3$. Τότε *θα έχω* $\mathrm{E}_2=-\int_1^3 f(x)dx$

Π*αρατηρώ ότι* $\mathrm{E}_2>\mathrm{E}_1$

$$\int_0^3 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^3 f(x)dx=\mathrm{E}_1-\mathrm{E}_2<0\left(\mathrm{E}_1<\mathrm{E}_2\Rightarrow \mathrm{E}_1-\mathrm{E}_2<0\right)$$

Έχω $f\left(\frac{1}{2}\right)>0$. Σ*υνεπώς* $\int_0^3 f(x)dx<f\left(\frac{1}{2}\right)$

i).Έστω υπάρχει F αρχική συνάρτηση της f με F πολυώνυμο

$3^{ου}$ *βαθμού.*Τότε $F'(x)=f(x)$ *και* $F'(x)$ *πολυώνυμο* $2^{ου}$ *βαθμού.*

Τ*ότε η* C_f *τέμνει τον* $x'x$ *το πολύ σε δυο διακεκριμένα σημεία.*

Άτοπο γιατί η C_f *τέμνει τον* $x'x$ *σε τρία διακεκριμένα σημεία.*

ii) Α*ν* $x\in\left[2,\frac{5}{2}\right]$. Τ*ότε θα έχω*:

$$\begin{cases}(\mathrm{I})\ \text{Η } F \text{ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα } [2,x] \\ (\mathrm{II})\ \text{Η } F \text{ είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα } (2,x)\end{cases}$$

Ο*πότε η F ικανοποιεί τις προυποθέσεις του* Θ.Μ.Τ *στο κλειστό*

διάστημα $[2,x]$. Ο*πότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον* $\xi\in(2,x)$ *τέτοιο*

ώστε να ισχύει:

$$\frac{F(x)-F(2)}{x-2}=F'(\xi)\overset{F'(\xi)=f(\xi)}{\Longrightarrow}F(x)-F(2)=(x-2)f(\xi)$$

Η f *είναι συνεχής στο κλειστό και φραγμένο διάστημα* $\left[2,\frac{5}{2}\right]$.

Ο*πότε απο το θεώρημα* Μ*έγιστης και* Ε*λάχιστής τιμής θα έχει μέγιστη τιμή* Μ. Ε*πειδή* $f(x)<0$ *κάθε* $x\in\left[2,\frac{5}{2}\right]$ *θα έχω* $\mathrm{M}<0$.

$$f(\xi)<\mathrm{M}\Rightarrow f^3(\xi)<\mathrm{M}^3\Rightarrow f^3(\xi)(x-2)^3e^{\frac{1}{x-2}}<\mathrm{M}^3(x-2)^3e^{\frac{1}{x-2}}\Rightarrow$$

$$\left[F(x)-F(2)\right]^3e^{\frac{1}{x-2}}<\mathrm{M}^3(x-2)^3e^{\frac{1}{x-2}},x\in\left(2,\frac{5}{2}\right]$$

Θ*έτω* $t=\frac{1}{x-2}\; x\in\left(2,\frac{5}{2}\right],x\to2^+\Rightarrow t\to+\infty$

$$\lim_{x\to2^+}(x-2)^3e^{\frac{1}{x-2}}=\lim_{x\to2^+}\frac{e^{\frac{1}{x-2}}}{\left(\frac{1}{x-2}\right)^3}=\lim_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t^3}\overset{\substack{\lim\limits_{t\to+\infty}e^t=\lim\limits_{t\to+\infty}t^3=+\infty\\ \text{Κανόνας } DLH}}{=}\lim_{t\to+\infty}\frac{\left(e^t\right)'}{\left(t^3\right)'}=\lim_{t\to+\infty}\frac{e^t}{3t^2}$$

$$\overset{\substack{\lim\limits_{t\to+\infty}e^t=\lim\limits_{t\to+\infty}3t^2=+\infty\\ \text{Κανόνας } DLH}}{=}\lim_{t\to+\infty}\frac{\left(e^t\right)'}{\left(3t^2\right)'}=\lim_{t\to+\infty}\frac{e^t}{6t}\overset{\substack{\lim\limits_{t\to+\infty}e^t=\lim\limits_{t\to+\infty}6t=+\infty\\ \text{Κανόνας } DLH}}{=}\lim_{t\to+\infty}\frac{\left(e^t\right)'}{(6t)'}=\lim_{t\to+\infty}\frac{e^t}{6}=+\infty$$

$$\lim_{x\to2^+}\mathrm{M}^3(x-2)^3e^{\frac{1}{x-2}}=\mathrm{M}^3\lim_{x\to2^+}(x-2)^3e^{\frac{1}{x-2}}=\mathrm{M}^3(+\infty)\overset{\mathrm{M}^3<0}{=}-\infty$$

$$\left.\begin{cases}(\mathrm{I})\left[F(x)-F(2)\right]^3e^{\frac{1}{x-2}}<\mathrm{M}^3(x-2)^3e^{\frac{1}{x-2}},x\in\left(2,\frac{5}{2}\right]\\ (\mathrm{II})\lim\limits_{x\to2^+}\mathrm{M}^3(x-2)^3e^{\frac{1}{x-2}}=-\infty\end{cases}\right\}\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to2^+}\left[F(x)-F(2)\right]^3e^{\frac{1}{x-2}}=-\infty$$

52.

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}_+=[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, *με* f' *συνεχή ώστε*:

- $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x - f(1)x^2 - x - 1}{x^2}\right)+\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{e^h + h - 1}{4h}\right)=0$
- $f'(x)\neq 0$
- $f(0)=0$

Έστω και η συνάρτηση $g:\mathbb{R}_+=[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, *ώστε* $g(x)=\dfrac{f(x)}{f'(x)}, x\geq 0$

Δ_1. Ν*α αποδείξετε ότι η* f *είναι γνησίως αύξουσα*

Δ_2. Ν*α βρείτε την εφαπτομένη της* C_g *στο σημείο που αυτή τέμνει τον άξονα* $x'x$

Δ_3. Ν*α αποδείξετε ότι η* $h(x)=-e^x\left(1-\int_0^1 f(t)\,dt\right)-x+1-\int_0^1 f(t)\,dt$ *έχει μοναδική ρίζα το* 0

Δ_4. Υ*ποθέτουμε ότι η ευθεία* $(\varepsilon)\; y=2x-1$ *έχει με την γραφική παράσταση* C_f *μόνο ένα κοινό σημείο* Μ *και έστω* $f(2)=\pi$.

Ν*α αποδείξετε ότι* $f(\mathbb{R}_+)=\mathbb{R}_+$

$$\Delta_1.\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x - f(1)x^2 - x - 1}{x^2} \overset{\substack{\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x - f(1)x^2 - x - 1\right)=\lim\limits_{x\to 0}x^2=0 \\ \text{Κανόνας DLH}}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x - f(1)x^2 - x - 1\right)'}{\left(x^2\right)'} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 2xf(1) - 1}{2x} \overset{\substack{\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x - 2xf(1) - 1\right)=\lim\limits_{x\to 0}(2x)=0 \\ \text{Κανόνας DLH}}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x - 2xf(1) - 1\right)'}{(2x)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 2f(1)}{2} = \frac{1 - 2f(1)}{2}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h + h - 1}{4h} \overset{\substack{\lim\limits_{h\to 0}\left(e^h + h - 1\right)=\lim\limits_{h\to 0}(4h)=0 \\ \text{Κανόνας DLH}}}{=} \lim_{h\to 0}\frac{\left(e^h + h - 1\right)'}{(4h)'} = \lim_{h\to 0}\frac{e^h + 1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x - f(1)x^2 - x - 1}{x^2}\right) + \lim_{h\to 0}\left(\frac{e^h + h - 1}{4h}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1 - 2f(1)}{2} + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{2 - 2f(1)}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{2\left(1 - f(1)\right)}{2} = 0 \Leftrightarrow 1 - f(1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f(1) = 1$$

$$\left\{\begin{array}{l} (\mathrm{I})\ \text{Η } f \textit{ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα } [0,1] \\ (\mathrm{II})\ \text{Η } f \textit{ είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα } (0,1) \end{array}\right\}$$

Οπότε η συνάρτηση f *ικανοποιεί τις προυποθέσεις του* Θ.Μ.Τ *στο κλειστό διάστημα* $[0,1]$. *Οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον* $\xi \in (0,1)$ *τέτοιο ώστε να ισχύει* $f'(\xi) = \dfrac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f(1) - f(0)$

$$\left\{\begin{array}{l} f'(\xi) = f(1) - f(0) \\ \xi \in (0,1) \end{array}\right\} \overset{\substack{f(1)=1 \\ f(0)=0}}{\Longrightarrow} \left\{\begin{array}{l} f'(\xi) = 1 > 0 \\ \xi \in (0,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f'(\xi) > 0 \\ \xi \in (0,1) \end{array}\right\}$$

$$\textit{Έχω}: \left\{\begin{array}{l} (\mathrm{I})\ \text{Η } f' \textit{ είναι συνεχής στο } (-\infty,+\infty) \\ (\mathrm{II})\ f'(x) \neq 0 \textit{ για κάθε } x \in (-\infty,+\infty) \end{array}\right\}$$

Οπότε $f'(x) > 0$ *για κάθε* $x \in [0,+\infty)$ *ή* $f'(x) > 0$ *για κάθε* $x \in [0,+\infty)$

Επειδή υπάρχει $\xi \in (0,1)$ *με* $f'(\xi) > 0$ *θα έχω* $f'(x) > 0$ *για κάθε* $x \in [0,+\infty)$. *Συνεπώς η* f *είναι γνησίως αύξουσα στο* $[0,+\infty)$

Δ_2.Αν $\mathrm{A}\left(x_0,y_0\right)$ *κοινό σημείο της* C_g *με τον άξονα* $x'x$.

$$\begin{Bmatrix} y_0=g\left(x_0\right) \\ y_0=0 \\ x_0\in\left[0,+\infty\right) \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \dfrac{f\left(x_0\right)}{f'\left(x_0\right)}=0 \\ y_0=0 \\ x_0\in\left[0,+\infty\right) \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} f\left(x_0\right)=0=f\left(0\right) \\ y_0=0 \\ x_0\in\left[0,+\infty\right) \end{Bmatrix} \overset{f\overset{\wedge}{\uparrow}\left[0,+\infty\right)}{\Longleftrightarrow} \begin{Bmatrix} x_0=0 \\ y_0=0 \end{Bmatrix}$$

$$g'\left(0\right)=\lim_{x\to 0}\frac{g\left(x\right)-g\left(0\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{f\left(x\right)}{f'\left(x\right)}-\dfrac{f\left(0\right)}{f'\left(0\right)}}{x}\overset{f(0)=0}{=}\lim_{x\to 0}\frac{f\left(x\right)}{xf'\left(x\right)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f\left(x\right)-f\left(0\right)}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{f'\left(x\right)}=f'\left(0\right)\frac{1}{f'\left(0\right)}=1$$

Έστω $\left(\varepsilon\right)$ *εφαπτομένη της* C_g *στο σημείο επαφής* $\mathrm{O}\left(0,0\right)$ Τότε *η ευθεία* $\left(\varepsilon\right)$ *θα έχει εξίσωση*:

$$y-g\left(0\right)=g'\left(0\right)\left(x-0\right)\Leftrightarrow y-0=1\left(x-0\right)\Leftrightarrow y=x$$

$$\Delta_3.\ h'\left(x\right)=-e^x\left(1-\int_0^1 f\left(t\right)dt\right)-1=-\left[e^x\left(1-\int_0^1 f\left(t\right)dt\right)+1\right]$$

$$0\le t\le 1\overset{f\overset{\wedge}{\uparrow}\left[0,+\infty\right)}{\Longleftrightarrow} f\left(t\right)\le f\left(1\right)\Rightarrow f\left(t\right)\le 1\Rightarrow\int_0^1 f\left(t\right)dt\le\int_0^1 dt\Rightarrow\int_0^1 f\left(t\right)dt\le 1$$

$$\Rightarrow 1\ge\int_0^1 f\left(t\right)dt\Rightarrow 1-\int_0^1 f\left(t\right)dt\ge 0\overset{e^x>0}{\Longrightarrow}e^x\left(1-\int_0^1 f\left(t\right)dt\right)\ge 0\Rightarrow$$

$$e^x\left(1-\int_0^1 f\left(t\right)dt\right)+1\ge 1>0\Rightarrow e^x\left(1-\int_0^1 f\left(t\right)dt\right)+1>0\Rightarrow$$

$$-\left[e^x\left(1-\int_0^1 f\left(t\right)dt\right)+1\right]<0\Rightarrow h'\left(x\right)<0$$

Ε*πειδή* $h'\left(x\right)<0$ *για κάθε* $x\in\left[0,+\infty\right)$ *η* h *είναι γνησίως φθίνουσα*

$$h\left(0\right)=-e^0\left(1-\int_0^1 f\left(t\right)dt\right)-0+1-\int_0^1 f\left(t\right)dt=-1+\int_0^1 f\left(t\right)dt+1-\int_0^1 f\left(t\right)dt=0$$

$$h\left(x\right)=0\Leftrightarrow h\left(x\right)=h\left(0\right)\overset{h\overset{\vee}{\downarrow}\left[0,+\infty\right)}{\Longleftrightarrow}x=0$$

Δ_4. $(\varepsilon): y = 2x - 1$

$\Theta\varepsilon\omega\rho\acute{\omega}\ \tau\eta\nu\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ \omega(x) = f(x) - (2x-1), x \in [0, +\infty)$

$\acute{E}\chi\omega\ \mathrm{M}(1, f(1)) \in C_f\ \gamma\iota\alpha\tau\acute{\iota}\ f(1) = 1$

$\acute{E}\chi\omega\ \mathrm{M}(1,1) \in (\varepsilon)\ \gamma\iota\alpha\tau\acute{\iota}\ y_{\mathrm{M}} = 2x_{\mathrm{M}} - 1$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \mathrm{M}(1,1) \in (\varepsilon) \cap C_f$. $\acute{E}\nu\alpha\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o\ \mathrm{A}(x,y)(\varepsilon) \cap C_f\ \alpha\nu\ \kappa\alpha\iota\ \mu\acute{o}\nu o$ $\alpha\nu\ \omega(x) = 0$. $\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ \eta\ \varepsilon\upsilon\theta\varepsilon\acute{\iota}\alpha\ (\varepsilon): y = 2x-1\ \acute{\varepsilon}\chi\varepsilon\iota\ \mu\varepsilon\ \tau\eta\nu\ \gamma\rho\alpha\varphi\iota\kappa\acute{\eta}$ $\pi\alpha\rho\acute{\alpha}\sigma\tau\alpha\sigma\eta\ C_f\ \mu\acute{o}\nu o\ \acute{\varepsilon}\nu\alpha\ \kappa o\iota\nu\acute{o}\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o\ \tau o\ \mathrm{M}(1,1)\ \pi\rho o\kappa\acute{\upsilon}\pi\tau\varepsilon\iota\ \eta$ $\iota\sigma o\delta\upsilon\nu\alpha\mu\acute{\iota}\alpha$:

$\omega(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$$\acute{E}\chi\omega: \begin{Bmatrix} (\mathrm{I})\ \mathrm{H}\ \omega\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ (1,+\infty) \\ (\mathrm{II})\ f(x) \neq 0\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x \in (1,+\infty) \end{Bmatrix}$$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ f(x) > 0\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x \in (1,+\infty)\ \acute{\eta}\ f(x) > 0\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x \in (1,+\infty)$

$$\omega(2) = f(2) - (2\bullet 2 - 1) \overset{f(2)=\pi}{=} \pi - 3 > 0\left(\Gamma\iota\alpha\tau\acute{\iota}: \pi > 3 \Rightarrow \pi - 3 > 0\right)$$

$\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ 2 \in (0,+\infty)\ \mu\varepsilon\ \omega(2) > 0\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega\ \omega(x) > 0\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x \in (1,+\infty)$

$$\begin{Bmatrix} \omega(x) > 0 \\ x \in (1,+\infty) \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} f(x) - (2x-1) > 0 \\ x \in (1,+\infty) \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} f(x) > 2x-1 \\ x \in (1,+\infty) \end{Bmatrix}$$

$$\acute{E}\chi\omega: \begin{Bmatrix} (\mathrm{I})\ f(x) > 2x-1\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x \in (1,+\infty) \\ (\mathrm{II})\ \lim\limits_{x \to +\infty} (2x-1) = +\infty \end{Bmatrix}$$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$$\begin{Bmatrix} (\mathrm{I})\ \mathrm{H}\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o [0,+\infty) \\ (\mathrm{II})\ \mathrm{H}\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \gamma\nu\eta\sigma\acute{\iota}\omega\varsigma\ \alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha\ \sigma\tau o [0,+\infty) \end{Bmatrix}$$

$$f([0,+\infty)) = \left[f(0), \lim_{x \to +\infty} f(x)\right) = [0,+\infty)$$

53.

$\acute{E}\sigma\tau\omega\ \eta\ o\rho\iota\sigma\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta\ \sigma\tau o\ \mathbb{R}\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f,\ \acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon\ \lim\limits_{x \to 0}\left(f^3(x) + f(x)\right) = 2$ $\mathrm{N}\alpha\ \alpha\pi o\delta\varepsilon\acute{\iota}\xi\varepsilon\tau\varepsilon\ \acute{o}\tau\iota\ \upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota\ \tau o\ \lim\limits_{x \to 0} f(x)\ \kappa\alpha\iota\ \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$

$$f^3(x)+f(x)-2=f^3(x)-1+f(x)-1=$$

$$\left[f(x)-1\right]\left[f(x)^2+f(x)+1\right]+\left[f(x)-1\right]=\left[f(x)-1\right]\left[f(x)^2+f(x)+2\right]$$

$$f(x)^2+f(x)+2=f(x)^2+2f(x)\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\overset{\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2}{=}$$

$$\left[f(x)+\frac{1}{2}\right]^2-\frac{1}{4}+\frac{8}{4}=\left[f(x)+\frac{1}{2}\right]^2+\frac{7}{4}$$

$$\left[f(x)+\frac{1}{2}\right]^2\geq 0\Rightarrow\left[f(x)+\frac{1}{2}\right]^2+\frac{7}{4}\geq\frac{7}{4}>0\Rightarrow f(x)^2+f(x)+2\neq 0$$

$$f^3(x)+f(x)-2=\left[f(x)-1\right]\left[f(x)^2+f(x)+2\right]\overset{f(x)^2+f(x)+2\neq 0}{\Longrightarrow}$$

$$f(x)-1=\frac{f^3(x)+f(x)-2}{f(x)^2+f(x)+2}\Rightarrow\left|f(x)-1\right|=\frac{\left|f^3(x)+f(x)-2\right|}{f(x)^2+f(x)+2}\Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{l} f(x)^2+f(x)+2\geq\frac{7}{4}\Rightarrow\frac{1}{f(x)^2+f(x)+2}\leq\frac{4}{7}\Rightarrow \\ \frac{\left|f^3(x)+f(x)-2\right|}{f(x)^2+f(x)+2}\leq\frac{4}{7}\left|f^3(x)+f(x)-2\right| \end{array}\right)$$

$$\left|f(x)-1\right|\leq\frac{4\left|f^3(x)+f(x)-2\right|}{7}\Rightarrow$$

$$-\frac{4\left|f^3(x)+f(x)-2\right|}{7}\leq f(x)-1\leq\frac{4\left|f^3(x)+f(x)-2\right|}{7}$$

$$Έχω:\left\{\begin{array}{l} (\mathrm{I})-\frac{4\left|f^3(x)+f(x)-2\right|}{7}\leq f(x)-1\leq\frac{4\left|f^3(x)+f(x)-2\right|}{7} \\ (\mathrm{II})\lim_{x\to 0}\left(-\frac{4\left|f^3(x)+f(x)-2\right|}{7}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{4\left|f^3(x)+f(x)-2\right|}{7} \end{array}\right\}$$

Οπότε απο το κριτήριο παρεμβολής θα έχω:

$$\lim_{x\to 0}\left[f(x)-1\right]=0\Rightarrow\lim_{x\to 0}f(x)=1$$

54.

$\Delta \acute{\iota} \nu \varepsilon \tau \alpha \iota\ \eta\ \sigma \upsilon \nu \varepsilon \chi \acute{\eta} \varsigma\ \sigma \upsilon \nu \acute{\alpha} \rho \tau \eta \sigma \eta\ f\ \sigma \tau o \left[0,1\right] \mu \varepsilon\ \theta \varepsilon \tau \iota \kappa \acute{\varepsilon} \varsigma\ \tau \iota \mu \acute{\varepsilon} \varsigma\ \nu \alpha\ \delta \varepsilon \iota \chi \tau \varepsilon \acute{\iota}$

$\acute{o} \tau \iota \int_0^1 f\left(x\right) dx \int_0^1 \frac{1}{f\left(x\right)} dx \geq 1$

$\Theta\varepsilon\omega\rho\acute{\omega}\ \tau\eta\nu\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ \mu\varepsilon\ \tau\acute{\upsilon}\pi o:$

$$g(\lambda)=\int_0^1\left(\sqrt{f(x)}+\frac{\lambda}{\sqrt{f(x)}}\right)^2dx=$$

$$=\int_0^1\left(\left(\sqrt{f(x)}\right)^2+2\sqrt{f(x)}\frac{\lambda}{\sqrt{f(x)}}+\frac{\lambda^2}{\left(\sqrt{f(x)}\right)^2}\right)dx=$$

$$=\int_0^1\left(f(x)+2\lambda+\frac{\lambda^2}{f(x)}\right)dx=\lambda^2\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx+2\lambda\int_0^1dx+\int_0^1f(x)dx=$$

$$\lambda^2\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx+2\lambda+\int_0^1f(x)dx$$

$$\acute{E}\chi\omega:\left(\sqrt{f(x)}+\frac{\lambda}{\sqrt{f(x)}}\right)^2\geq 0\Rightarrow\int_0^1\left(\sqrt{f(x)}+\frac{\lambda}{\sqrt{f(x)}}\right)^2dx\Rightarrow g(\lambda)\geq 0$$

$\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ f(x)>0\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in[0,1]\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx>0\Rightarrow\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx\neq 0$$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \eta\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ g\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \tau\rho\iota\acute{\omega}\nu\upsilon\mu o\ \mu\varepsilon\ g(\lambda)\geq 0\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ \lambda\in\mathbb{R}.$

$\acute{A}\rho\alpha\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\Delta\leq 0\Leftrightarrow 4-4\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx\leq 0\Leftrightarrow 4\left(1-\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx\right)\leq 0\Leftrightarrow$$

$$1-\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx\leq 0\Leftrightarrow 1\leq\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx\Leftrightarrow$$

$$\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx\geq 1$$

55.

$\mathrm{M}\iota\alpha\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ o\rho\iota\sigma\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta\ \sigma\tau o\ \delta\iota\acute{\alpha}\sigma\tau\eta\mu\alpha\ \Delta=[\alpha,\beta]\ (\alpha<\beta),$

$\pi\alpha\rho\alpha\gamma\omega\gamma\acute{\iota}\sigma\iota\mu\eta\ \sigma\tau o\ \overset{0}{\Delta}=(\alpha,\beta)\ \kappa\alpha\iota\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}o\upsilon\nu\ f(\alpha)=f(\beta)=0.$

$\mathrm{N}\alpha\ \alpha\pi o\delta\varepsilon\acute{\iota}\xi\varepsilon\tau\varepsilon\ \acute{o}\tau\iota\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ \lambda\in\mathbb{R},\ \eta\ \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta\ f'(x)=\lambda f(x)\ \acute{\varepsilon}\chi\varepsilon\iota\ \mu\iota\alpha$

$\tau o\upsilon\lambda\acute{\alpha}\chi\iota\sigma\tau o\nu\ \rho\acute{\iota}\zeta\alpha\ \sigma\tau o\ \overset{0}{\Delta}$

$\Theta\varepsilon\omega\rho\acute{\omega}\ \tau\eta\nu\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ g(x)=e^{-\lambda x}f(x), x\in[\alpha,\beta]$

$$\left.\begin{cases} g(\alpha)=e^{-\lambda\alpha}f(\alpha)\overset{f(\alpha)=0}{=}e^{-\lambda\alpha}\bullet 0=0 \\ g(\beta)=e^{-\lambda\beta}f(\beta)\overset{f(\beta)=0}{=}e^{-\lambda\beta}\bullet 0=0\end{cases}\right\}\Rightarrow g(\alpha)=g(\beta)$$

Η *συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα* (α,β) *ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.* Ο*πότε για κάθε* $x\in(\alpha,\beta)$ *θα έχω*:

$$g'(x)=\left[e^{-\lambda x}f(x)\right]'=\left(e^{-\lambda x}\right)'f(x)+e^{-\lambda x}f'(x)=$$
$$=-\lambda e^{-\lambda x}f(x)+e^{-\lambda x}f'(x)=e^{-\lambda x}\left(f'(x)-\lambda f(x)\right)$$

$$\left\{\begin{array}{l} (\mathrm{I})\ \text{Η } g \text{ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα } [\alpha,\beta] \text{ ως γινόμενο} \\ \text{συνεχών συναρτήσεων} \\ (\mathrm{II})\ \text{Η } g \text{ είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα } (\alpha,\beta) \text{ ως} \\ \text{γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων} \\ (\mathrm{III})\ g(\alpha)=g(\beta) \end{array}\right\}$$

Ο*πότε η συνάρτηση g ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο κλειστό διάστημα* $[\alpha,\beta]$. Ο*πότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον* $\xi\in(\alpha,\beta)$ *τέτοιο ώστε να ισχύει* $g'(\xi)=0$

$$\left.\begin{cases} g'(\xi)=0 \\ \xi\in(\alpha,\beta)\end{cases}\right\}\Rightarrow\left.\begin{cases} e^{-\lambda\xi}\left(f'(\xi)-\lambda f(\xi)\right)=0 \\ \xi\in(\alpha,\beta)\end{cases}\right\}\overset{e^{-\lambda\xi}\neq 0}{\Longrightarrow}\left.\begin{cases} f'(\xi)-\lambda f(\xi)=0 \\ \xi\in(\alpha,\beta)\end{cases}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{cases} f'(\xi)=\lambda f(\xi) \\ \xi\in(\alpha,\beta)\end{cases}\right\}$$

56.

Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}_+=[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, *με* $f''(\mathbb{R}_+)=(1,+\infty)$

α. Ν*α αποδείξετε ότι* $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

β. Ν*α αποδείξετε ότι* $f(0)+f(2)\geq 2f(1)+1$

$\underline{\alpha.\ \Theta\alpha\ \alpha\pi o\delta\varepsilon\acute{\iota}\xi\omega\ \acute{o}\tau\iota\ \lim_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty}$

$\mathrm{A}\nu\ x>0\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\,\mathrm{H}\ f'\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ \kappa\lambda\varepsilon\iota\sigma\tau\acute{o}\ \delta\iota\acute{\alpha}\sigma\tau\eta\mu\alpha\ [0,x]\\(\mathrm{II})\,\mathrm{H}\ f'\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \pi\alpha\rho\alpha\gamma\omega\gamma\acute{\iota}\sigma\iota\mu\eta\ \sigma\tau o\ \alpha\nu o\iota\kappa\tau\acute{o}\ \delta\iota\acute{\alpha}\sigma\tau\eta\mu\alpha\ (0,x)\end{array}\right\}$$

Άρα η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προυποθέσεις του Θ.Μ.Τ *στο κλειστό διάστημα* $[0,x]$ Ο*πότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον* $\xi\in(0,x)$

τέτοιο ώστε να ισχύει $f''(\xi)=\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x-0}$

$$\left\{\begin{array}{l}f''(\xi)=\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}\\ \xi\in(0,x),\ f''(\xi)>1\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}>1\\ x>0\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}x\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}>1\bullet x\\ x>0\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}f'(x)-f'(0)>x\\ x>0\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}f'(x)-f'(0)>x\\ x>0\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}f'(x)>x+f'(0)\\ x>0\end{array}\right\}$$

$$\acute{E}\chi\omega:\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\ f'(x)>x+f'(0),\ x\in(0,+\infty)\\(\mathrm{II})\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+f'(0)\right)=+\infty\end{array}\right\}\ \mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \lim_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$$

Ο*πότε υπάρχει* $x_0>0$ *με* $f'(x_0)>0$. Ε*πειδή* $f''(x)>0$ *για κάθε* $x\in[0,+\infty)$ *η* f *είναι κυρτή.* Θ*εωρώ την εφαπτομένη* (ε) *της* C_f *στο σημείο επαφής* $\mathrm{A}(x_0,f(x_0))$. Τ*ότε η ευθεία* (ε) *έχει εξίσωση*:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

Ε*πειδή η* f *είναι κυτρή θα έχω*:

$$f(x)\geq f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)\right]=f'(x_0)\lim_{x\to+\infty}(x-x_0)+f(x_0)=$$

$$f'(x_0)(+\infty)+f(x_0)\overset{f'(x_0)>0}{=}(+\infty)+f(x_0)=+\infty$$

$$\left\{\begin{matrix}(\mathrm{I})\ f(x)\geq f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0),x\in[0,+\infty)\\(\mathrm{II})\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left[f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)\right]=+\infty\end{matrix}\right\}$$

Ο$\pi\acute{o}\tau\varepsilon$ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

β. Θ$\varepsilon\omega\rho\acute{\omega}$ $\tau\eta\nu$ $\sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta$ $g(x)=f(x)-\dfrac{(x-1)^2}{2},x\in[0,+\infty)$

$$g'(x)=f'(x)-\frac{2(x-1)(x-1)'}{2}=f'(x)-(x-1),x\in[0,+\infty)$$

$$g''(x)=f''(x)-(x-1)'=f''(x)-1$$

$$x\in[0,+\infty)\Rightarrow f''(x)\geq1\Rightarrow f''(x)-1>0\Rightarrow g''(x)>0$$

Ε$\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}$ $g''(x)>0$ $\gamma\iota\alpha$ $\kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon$ $x\in[0,+\infty)$ η g $\varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota$ $\kappa\upsilon\rho\tau\acute{\eta}$.

Σ$\upsilon\nu\varepsilon\pi\acute{\omega}\varsigma$ $g'\underset{\wedge}{\uparrow}[0,+\infty)$

$$g(0)=f(0)-\frac{(0-1)^2}{2}=f(0)-\frac{1}{2}$$

$$g(2)=f(2)-\frac{(2-1)^2}{2}=f(2)-\frac{1}{2}$$

$$g(1)=f(1)-\frac{(1-1)^2}{2}=f(1)$$

<u>Θα $\alpha\pi o\delta\varepsilon\acute{\iota}\xi\omega$ $\acute{o}\tau\iota: g(0)+g(2)\geq 2g(1)$</u>

$$g(0)+g(2)\geq2g(1)\Leftrightarrow g(0)-g(1)+g(2)-g(1)\geq0\Leftrightarrow$$

$$\left[g(2)-g(1)\right]-\left[g(0)-g(1)\right]\geq0\,(2)$$

$$\begin{Bmatrix} (\mathrm{I})\ \mathrm{H}\ g\ \textit{είναι συνεχής στα κλειστά διαστήματα}\ [0,1],[1,2] \\ (\mathrm{II})\ \mathrm{H}\ g\ \textit{είναι παραγωγίσιμη στα ανοικτά διαστήματα}\ (0,1),(1,2) \end{Bmatrix}$$

Άρα η συνάρτηση g ικανοποιεί τις προυποθέσεις του Θ.Μ.Τ *στα κλειστά διαστήματα* $[0,1],[1,2]$ Ο*πότε θα υπάρχουν* $\xi_1 \in (0,1),\ \xi_2 (1,2)$

τέτοια ώστε να ισχύουν $g'(\xi_1) = \dfrac{g(1)-g(0)}{1-0}$ *και* $g'(\xi_2) = \dfrac{g(2)-g(2)}{2-1}$

$$\begin{Bmatrix} g'(\xi_1) = g(1)-g(0) \\ g'(\xi_2) = g(2)-g(1) \\ 0<\xi_1<1<\xi_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} g'(\xi_1) = g(1)-g(0) \\ g'(\xi_2) = g(2)-g(1) \\ \xi_2 > \xi_1 \end{Bmatrix} \overset{g'\uparrow[0,+\infty)}{\Longrightarrow}$$

$$\begin{Bmatrix} g'(\xi_1) = g(1)-g(0) \\ g'(\xi_2) = g(2)-g(1) \\ g'(\xi_2) > g'(\xi_1) \end{Bmatrix}$$

Τ*ότε απο την σχέση* (2) *θα έχω*:

$$\left[g(2)-g(1)\right]-\left[g(0)-g(1)\right] \ge 0 \Leftrightarrow g'(\xi_2)-g'(\xi_1) \ge 0 \Leftrightarrow g'(\xi_2) \ge g'(\xi_1)$$

Έχω: $g(0)+g(2) \ge 2g(1) \overset{\substack{g(0)=f(0)-\frac{1}{2} \\ g(2)=f(2)-\frac{1}{2} \\ g(1)=f(1)}}{\Longleftrightarrow} f(0)-\dfrac{1}{2}+f(2)-\dfrac{1}{2} \ge 2f(1) \Leftrightarrow$

$f(0)+f(2)-1 \ge 2f(1) \Leftrightarrow f(0)+f(2) \ge 2f(1)+1$

57.

Θ*εωρούμε τις συναρτήσεις* $f(x) = x+\sqrt{x}$ *και* $g(x) = x-\dfrac{1}{4}$. Ν*α βρείτε*:

α.i. Τ*ην αντίστροφη συνάρτηση της* f *και να την μελετήσετε ως προς την μονοτονία.*

ii. Σ*το* $[-2,+\infty)$ *τις λύσεις της ανίσωσης*

$\sqrt{9+4x}-\sqrt{5+4x^2} < -2x^2+2x+2 \ (1)$

β. Τ*η συνάρτηση* $f^{-1}\circ g$ *καθώς και τα κοινά σημεία των* $C_{f^{-1}\circ g}, C_g$.

γ. Τ*ο όριο* $\mathrm{A} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{(1-x)\,f(\eta\mu x)}{\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)}$

$i) D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} = [0, +\infty)$

Αν $x \in (0, +\infty)$ *θα έχω*:

$$f'(x) = \left(x + \sqrt{x}\right)' = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$x > 0 \Rightarrow \sqrt{x} > 0 \Rightarrow 2\sqrt{x} > 0 \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0 \Rightarrow 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} > 1 > 0 \Rightarrow 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$$

$$\Rightarrow f'(x) > 0$$

$$\textit{Έχω}: \left.\begin{cases} (\mathrm{I})\ f'(x) > 0 \ \textit{για κάθε}\ x \in (0, +\infty) \\ (\mathrm{II})\ \mathrm{H}\ f\ \textit{είναι συνεχής στο}\ [0, +\infty) \end{cases}\right\} \text{Οπότε } f \underset{\wedge}{\uparrow} [0, +\infty)$$

Επειδή $f \underset{\wedge}{\uparrow} [0, +\infty)$ *υπάρχει η αντίστροφη της* f.

$$\left\{\begin{array}{l} (\mathrm{I})\ f \underset{\wedge}{\uparrow} [0, +\infty) \\ (\mathrm{II})\ \mathrm{H}\ f\ \textit{είναι συνεχής στο}\ [0, +\infty) \end{array}\right\}$$

$$\text{Οπότε } f\left([0, +\infty)\right) = \left[f(0), \lim_{x \to +\infty} f(x)\right) = [0, +\infty)$$

Τότε *θα έχω* $D_{f^{-1}} = f\left(D_f\right) = [0, +\infty)$

$$\left\{\begin{array}{l} y = f(x) \\ x \in [0, +\infty) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + \sqrt{x} - y = 0 \\ x \in [0, +\infty) \end{array}\right\} \overset{x = \left(\sqrt{x}\right)^2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{l} \left(\sqrt{x}\right)^2 + \sqrt{x} - y = 0 (1) \\ x \in [0, +\infty) \end{array}\right\}$$

Θέτω: $\sqrt{x} = t, t \geq 0 (2)$

Τότε *απο τις σχέσεις* $(1), (2)$ *θα έχω*:

$$\left\{\begin{array}{l} \left(\sqrt{x}\right)^2 + \sqrt{x} - y = 0 (1) \\ x \in [0, +\infty) \end{array}\right\} \overset{\sqrt{x} = t}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{l} t^2 + t - y = 0 (3) \\ x \in [0, +\infty) \end{array}\right\}$$

Επειδή *η δευτεροβάθμια εξίσωση* (1) *έχει λύση θα έχω*:

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow \beta^2 - 4\alpha\gamma \geq 0 \Leftrightarrow 1 + 4y \geq 0 \Leftrightarrow 4y \geq -1 \Leftrightarrow y \geq -\frac{1}{4}$$

$$t_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4y}}{2} = \begin{cases} \nearrow \frac{-1 + \sqrt{1 + 4y}}{2} \\ \searrow \frac{-1 - \sqrt{1 + 4y}}{2} \left(\textit{Απορρίπτεται γιατί } t \geq 0\right) \end{cases}$$

Αν $t=\dfrac{-1+\sqrt{1+4y}}{2}$ *θα πρέπει*:

$$\begin{cases}\dfrac{-1+\sqrt{1+4y}}{2}\ge 0\\ y\ge -\dfrac{1}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{1+4y}\ge 1\\ y\ge -\dfrac{1}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\sqrt{1+4y}\right)^2\ge 1^2\\ y\ge -\dfrac{1}{4}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}1+4y\ge 1\\ y\ge -\dfrac{1}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4y\ge 0\\ y\ge -\dfrac{1}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y\ge 0\\ y\ge -\dfrac{1}{4}\end{cases}\Leftrightarrow y\ge 0$$

$$\begin{cases}t=\dfrac{\sqrt{1+4y}-1}{2}\\ y\ge 0\end{cases}\overset{\sqrt{x}=t}{\Longleftrightarrow}\begin{cases}\sqrt{x}=\dfrac{\sqrt{1+4y}-1}{2}\\ y\ge 0, x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\sqrt{x}\right)^2=\left(\dfrac{\sqrt{1+4y}-1}{2}\right)^2\\ y\ge 0, x\ge 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=\left(\dfrac{\sqrt{1+4y}-1}{2}\right)^2\\ y\ge 0, x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\left(\dfrac{\sqrt{1+4y}-1}{2}\right)^2\\ y\ge 0, \left(\dfrac{\sqrt{1+4y}-1}{2}\right)^2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\left(\dfrac{\sqrt{1+4y}-1}{2}\right)^2\\ y\ge 0\end{cases}$$

Οπότε $f^{-1}(x)=\left(\dfrac{\sqrt{1+4x}-1}{2}\right)^2, x\ge 0$

Αν $y_1, y_2\in[0,+\infty)$ *με* $y_1<y_2$. Τότε *θα υπάρχουν* $x_1, x_2\in[0,+\infty)$ *με*

$y_1=f(x_1)$ *και* $y_2=f(x_2)$

$y_1=f(x_1)\Leftrightarrow x_1=f^{-1}(y_1)$

$y_2=f(x_2)\Leftrightarrow x_2=f^{-1}(y_2)$

$$y_1<y_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)\overset{f\underset{\wedge}{\uparrow}[0,+\infty)}{\Longrightarrow} x_1<x_2\overset{\substack{x_1=f^{-1}(y_1)\\ x_2=f^{-1}(y_2)}}{\Longrightarrow} f^{-1}(y_1)<f^{-1}(y_2)$$

Συνεπώς $f^{-1}\underset{\wedge}{\uparrow}[0,+\infty)$

$ii)$ Αν $x \geq 0$ θα έχω:

$$f^{-1}(x)=\left(\frac{\sqrt{1+4x}-1}{2}\right)^2=\frac{\left(\sqrt{1+4x}\right)^2-2\sqrt{1+4x}+1}{4}=\frac{2+4x-2\sqrt{1+4x}}{4}$$

$$=\frac{2\left(1+2x-\sqrt{1+4x}\right)}{4}=\frac{1+2x-\sqrt{1+4x}}{2}$$

$$x\geq -2\Rightarrow 4x\geq -8\Rightarrow 4x+9\geq 9-8\Rightarrow 4x+9\geq 1>0\Rightarrow 4x+9>0$$

$$\left\{\begin{array}{l}\sqrt{9+4x}-\sqrt{5+4x^2}<-2x^2+2x+2\\ x\geq -2\end{array}\right\}\overset{\substack{9+4x=1+4(2+x)\\ 5+4x^2=1+4\left(1+x^2\right)}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\sqrt{1+4(2+x)}-\sqrt{1+4\left(1+x^2\right)}<-2x^2+2x+2\\ x\geq -2\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}2x^2-\sqrt{1+4\left(1+x^2\right)}<-\sqrt{1+4(2+x)}+2x+2\\ x\geq -2\end{array}\right\}\overset{\substack{\text{Προσθέτω και στα}\\ \text{δυο μέλη το } 2}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left\{\begin{array}{l}2x^2-\sqrt{1+4\left(1+x^2\right)}+2<-\sqrt{1+4(2+x)}+2x+2+2\\ x\geq -2\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}2\left(x^2+1\right)-\sqrt{1+4\left(1+x^2\right)}<-\sqrt{1+4(2+x)}+2x+4\\ x\geq -2\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}2\left(x^2+1\right)-\sqrt{1+4\left(1+x^2\right)}<2(x+2)-\sqrt{1+4(2+x)}\\ x\geq -2\end{array}\right\}\overset{\substack{\text{Προσθέτω και στα}\\ \text{δυο μέλη το } 1}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left\{\begin{array}{l}1+2\left(x^2+1\right)-\sqrt{1+4\left(1+x^2\right)}<1+2(x+2)-\sqrt{1+4(2+x)}\\ x\geq -2\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1+2\left(x^2+1\right)-\sqrt{1+4\left(1+x^2\right)}}{2}<\dfrac{1+2(x+2)-\sqrt{1+4(2+x)}}{2}\\ x\geq -2\end{array}\right\}\overset{\substack{f^{-1}(x)=\frac{1+2x-\sqrt{1+4x}}{2}\\ x\geq 0}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left\{\begin{matrix} f^{-1}\left(x^2+1\right)< f^{-1}\left(x+2\right) \\ x \geq -2 \end{matrix}\right\} \overset{f^{-1}\uparrow[0,+\infty)}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{matrix} x^2+1<x+2 \\ x\geq -2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x^2-x-1<0 \\ x+2\geq 0 \end{matrix}\right\}$$

$\Theta\varepsilon\omega\rho\acute{\omega}\ \tau\eta\nu\ \delta\varepsilon\upsilon\tau\varepsilon\rho o\beta\acute{\alpha}\theta\mu\iota\alpha\ \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta : x^2-x-1=0\left(1\right)$

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=\left(-1\right)^2-4\bullet 1\bullet\left(-1\right)=1+4=5>0$

$\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ \Delta>0\ \eta\ \delta\varepsilon\upsilon\tau\varepsilon\rho o\beta\acute{\alpha}\theta\mu\iota\alpha\ \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta\ \left(1\right)\ \acute{\varepsilon}\chi\varepsilon\iota\ \delta\upsilon o\ \rho\acute{\iota}\zeta\varepsilon\varsigma$
$\pi\rho\alpha\gamma\mu\alpha\tau\iota\kappa\acute{\varepsilon}\varsigma\ \kappa\alpha\iota\ \acute{\alpha}\nu\iota\sigma\varepsilon\varsigma :$

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-\left(-1\right)\pm\sqrt{5}}{2\bullet 1}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}=\begin{matrix}\nearrow\frac{1+\sqrt{5}}{2}\\ \searrow\frac{1-\sqrt{5}}{2}\end{matrix}$$

x	$-\infty$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
x^2-x-1	$+$	0	$-$	0	$+$	

x	$-\infty$	-2		$+\infty$
$x+2$	$-$	0	$+$	

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2}>-2\Leftrightarrow\frac{1-\sqrt{5}}{\cancel{2}}\bullet\cancel{2}>-2\bullet 2\Leftrightarrow 1-\sqrt{5}>-4\Leftrightarrow-\sqrt{5}>-5\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{5}<5\Leftrightarrow\left(\sqrt{5}\right)^2<5^2\Leftrightarrow 5<25\left(\mathrm{I}\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota\right)$$

x	$-\infty$	-2	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$+\infty$
x^2-x-1	$+$	$+$ 0	$-$ 0	$+$	
$x+2$	$-$ 0	$+$	$+$	$+$	

$$\left.\begin{cases} x^2-x-1<0 \\ x+2\geq 0 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{2}<x<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$\beta.$ $D_{f^{-1}\circ g}=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\in D_g, g(x)\in D_{f^{-1}}\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x-\frac{1}{4}\geq 0\right\}=$

$\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\geq\frac{1}{4}\right\}=\left[\frac{1}{4},+\infty\right)$

$\Gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in\left[\frac{1}{4},+\infty\right)\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\left(f^{-1}\circ g\right)(x)=f^{-1}\left(g(x)\right)\overset{f^{-1}(x)=\left(\frac{\sqrt{1+4x}-1}{2}\right)^2,\,x\geq 0}{=}\left(\frac{\sqrt{1+4g(x)}-1}{2}\right)^2\overset{g(x)=x-\frac{1}{4}}{=}$$

$$\left(\frac{\sqrt{1+4\left(x-\frac{1}{4}\right)}-1}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{1+4x-1}-1}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{4x}-1}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{4}\sqrt{x}-1}{2}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{2\sqrt{x}-1}{2}\right)^2$$

$$\left(f^{-1}\circ g\right)(x)=\left(\frac{2\sqrt{x}-1}{2}\right)^2,\ x\in\left[\frac{1}{4},+\infty\right)$$

$\text{Αν } \mathrm{A}\left(x_0, y_0\right) \in C_{f^{-1}\circ g} \bigcap C_g, x_0 \in \left[\frac{1}{4}, +\infty\right). \text{ Τότε θα έχω:}$

$$\left\{\begin{array}{l} y_0 = f^{-1}\left(g\left(x_0\right)\right) \\ y_0 = g\left(x_0\right) \\ x_0 \in \left[\dfrac{1}{4}, +\infty\right) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} f^{-1}\left(g\left(x_0\right)\right) = g\left(x_0\right) \\ y_0 = g\left(x_0\right) \\ x_0 \in \left[\dfrac{1}{4}, +\infty\right) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} g\left(x_0\right) = f\left(g\left(x_0\right)\right) \\ y_0 = g\left(x_0\right) \\ x_0 \in \left[\dfrac{1}{4}, +\infty\right) \end{array}\right\}$$

$$\overset{f(x)x+\sqrt{x},x\geq 0}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{l} \cancel{g\left(x_0\right)} = \cancel{g\left(x_0\right)} + \sqrt{g\left(x_0\right)} \\ y_0 = g\left(x_0\right) \\ x_0 \in \left[\dfrac{1}{4}, +\infty\right) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \sqrt{g\left(x_0\right)} = 0 \\ y_0 = g\left(x_0\right) \\ x_0 \in \left[\dfrac{1}{4}, +\infty\right) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} g\left(x_0\right) = 0 \\ y_0 = g\left(x_0\right) \\ x_0 \in \left[\dfrac{1}{4}, +\infty\right) \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_0 - \dfrac{1}{4} = 0 \\ y_0 = 0 \\ x_0 \in \left[\dfrac{1}{4}, +\infty\right) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_0 = \dfrac{1}{4} \\ y_0 = 0 \\ x_0 \in \left[\dfrac{1}{4}, +\infty\right) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_0 = \dfrac{1}{4} \\ y_0 = 0 \end{array}\right\}$$

$\text{Οπότε έχω το σημείο } \mathrm{A}\left(\frac{1}{4}, 0\right)$

$$\gamma.\ \mathrm{A}=\lim_{x\to1^-}\frac{(1-x)f(\eta\mu x)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}x\right)}\overset{\sigma\upsilon\nu x=\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{=}\lim_{x\to1^-}\frac{(1-x)f(\eta\mu x)}{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{\frac{(1-x)f(\eta\mu x)}{(1-x)}}{\frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}(1-x)\right)}{1-x}}=\lim_{x\to1^-}\frac{1}{\frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}(1-x)\right)}{1-x}}\lim_{x\to1^-}f(\eta\mu x)=$$

$$\frac{1}{\lim\limits_{x\to1^-}\frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}(1-x)\right)}{\frac{\pi}{2}(1-x)\frac{2}{\pi}}}\lim_{x\to1^-}\left(\eta\mu x+\sqrt{\eta\mu x}\right)=\frac{1}{\frac{\pi}{2}}\left(\eta\mu1+\sqrt{\eta\mu1}\right)=\frac{2}{\pi}\left(\eta\mu1+\sqrt{\eta\mu1}\right)$$

$$\Theta\acute{\varepsilon}\tau\omega: t=\frac{\pi}{2}(1-x)$$

$$x\to1^-\Rightarrow1-x\to0^+\ (x<1\Rightarrow1>x\Rightarrow1-x>0)\Rightarrow t\to0^+$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}(1-x)\right)}{\frac{\pi}{2}(1-x)\frac{2}{\pi}}=\lim_{t\to0^+}\frac{\eta\mu t}{t\frac{2}{\pi}}=\frac{\pi}{2}\lim_{t\to0^+}\frac{\eta\mu t}{t\frac{2}{\pi}}=\frac{\pi}{2}\bullet1=\frac{\pi}{2}$$

58.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1+x^2}{e^{2x}}, x\in\mathbb{R}$

$\alpha)$ *Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και ότι στρέφει τα κοίλα προς στρέφει τα κοίλα της προς τα άνω, στο πεδίο ορισμού της.*

$\beta)$ *Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, με $\alpha<\beta$ ισχύει η σχέση:*

$$\frac{1+\alpha^2}{1+\beta^2}>e^{2(\alpha-\beta)}$$

$\gamma)$ *Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:* $\int_0^2 f(x)\,dx$

$$\alpha)\ \text{Έχω}\ D_f=\mathbb{R}\ \text{και}\ f(x)=\frac{1+x^2}{e^{2x}}=e^{-2x}\left(1+x^2\right)$$

$$f'(x)=\left(e^{-2x}\right)'\left(1+x^2\right)+e^{-2x}\left(1+x^2\right)'=-2e^{-2x}\left(1+x^2\right)+e^{-2x}2x=$$

$$=-2e^{-2x}\left(1+x^2\right)-2e^{-2x}(-x)\overset{\substack{\text{Βγάζω κοινό}\\ \text{παράγοντα}\\ \text{το } -2e^{-2x}}}{=}-2e^{-2x}\left(x^2-x+1\right)=$$

$$-2e^{-2x}\left(x^2-2\bullet x\bullet\frac{1}{2}+1\right)=-2e^{-2x}\left[x^2-2\bullet x\bullet\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2+1\right]$$

$$\overset{\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha-\beta)^2}{=}-2e^{-2x}\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+\frac{4}{4}\right]=-2e^{-2x}\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\geq 0\Rightarrow\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geq\frac{3}{4}>0\Rightarrow\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0\Rightarrow$$

$$2e^{-2x}\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]>0\Rightarrow-2e^{-2x}\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]<0\Rightarrow f'(x)<0$$

Επειδή $f'(x)<0$ *για κάθε* $x\in\mathbb{R}$ *η* f *είναι γνησίως φθίνουσα στο* $\mathbb{R}$

$$f''(x)=\left(-2e^{-2x}\right)'\left(x^2-x+1\right)-2e^{-2x}\left(x^2-x+1\right)'=$$

$$-2(-2x)'e^{-2x}\left(x^2-x+1\right)-2e^{-2x}(2x-1)=$$

$$4e^{-2x}\left(x^2-x+1\right)-2e^{-2x}\left(2x^2-1\right)=2e^{-2x}\bullet 2\left(x^2-x+1\right)-2e^{-2x}(2x-1)=$$

$$=2e^{-2x}\left(2x^2-2x+2\right)-2e^{-2x}(2x-1)\overset{\substack{\text{Βγάζω κοινό}\\ \text{παράγοντα}\\ \text{το } 2e^{-2x}}}{=}2e^{-2x}\left[2x^2-2x+2-(2x-1)\right]$$

$$=2e^{-2x}\left(2x^2-4x+3\right)=2e^{-2x}2\left(\frac{2x^2}{2}-\frac{4x}{2}+\frac{3}{2}\right)=4e^{-2x}\left(x^2-2x+\frac{3}{2}\right)\overset{\frac{3}{2}=1+\frac{1}{2}}{=}$$

$$4e^{-2x}\left(x^2-2x+1+\frac{1}{2}\right)=4e^{-2x}\left(x^2-2\cdot x\cdot 1+1^2+\frac{1}{2}\right)\overset{(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2}{=}$$

$$4e^{-2x}\left[(x-1)^2+\frac{1}{2}\right]$$

$$(x-1)^2\geq 0\Rightarrow (x-1)^2+\frac{1}{2}\geq\frac{1}{2}>0\Rightarrow (x-1)^2+\frac{1}{2}>0\Rightarrow 4e^{-2x}\left[(x-1)^2+\frac{1}{2}\right]>0$$

$$\Rightarrow f''(x)>0$$

Ε*πειδή* $f''(x)>0$ *για κάθε* $x\in\mathbb{R}$ *η* f *στρέφει τα κοίλα προς τα άνω.*

$$\beta)\ \frac{1+\alpha^2}{1+\beta^2}>e^{2(\alpha-\beta)}\Leftrightarrow\frac{1+\alpha^2}{1+\beta^2}>e^{2\alpha-2\beta}\Leftrightarrow\frac{1+\alpha^2}{1+\beta^2}>\frac{e^{2\alpha}}{e^{2\beta}}\overset{\substack{(1+\beta^2)e^{2\beta}>0\\ \text{Πολλαπλασιάζω}\\ \text{και τα δυο μέλη}\\ \text{της ανίσωσης}\\ \text{με το}(1+\beta^2)e^{2\beta}}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\frac{1+\alpha^2}{\cancel{1+\beta^2}}\cancel{(1+\beta^2)}e^{2\beta}>\frac{e^{2\alpha}}{\cancel{e^{2\beta}}}(1+\beta^2)\cancel{e^{2\beta}}\Leftrightarrow(1+\alpha^2)e^{2\beta}>e^{2\alpha}(1+\beta^2)\overset{\substack{e^{2\alpha}e^{2\beta}>0\\ \text{Διαιρώ και τα}\\ \text{δυο μέλη}\\ \text{της ανίσωσης}\\ \text{με το } e^{2\alpha}e^{2\beta}}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\frac{(1+\alpha^2)\cancel{e^{2\beta}}}{e^{2\alpha}\cancel{e^{2\beta}}}>\frac{\cancel{e^{2\alpha}}(1+\beta^2)}{\cancel{e^{2\alpha}}e^{2\beta}}\Leftrightarrow\frac{1+\alpha^2}{e^{2\alpha}}>\frac{1+\beta^2}{e^{2\beta}}\Leftrightarrow f(\alpha)>f(\beta)\overset{f\overset{\vee}{\downarrow}\mathbb{R}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\alpha<\beta\,(\text{Ισχύει})$$

$$\gamma)\ \int_0^2 f(x)dx \overset{f(x)=e^{-2x}(1+x^2)}{=} \int_0^2 e^{-2x}\left(1+x^2\right)dx \overset{e^{-2x}=\left(\frac{e^{-2x}}{-2}\right)'}{=} \int_0^2 \left(\frac{e^{-2x}}{-2}\right)'\left(1+x^2\right)dx =$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^2 \left(e^{-2x}\right)'\left(1+x^2\right)dx = -\frac{1}{2}\left\{\left[e^{-2x}\left(1+x^2\right)\right]_0^2 - \int_0^2 e^{-2x}\left(1+x^2\right)' dx\right\} =$$

$$-\frac{1}{2}\left(5e^{-4}-1\right)+\frac{1}{2}\int_0^2 e^{-2x}2xdx = -\frac{1}{2}\left(5e^{-4}-1\right)+\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}\int_0^2 e^{-2x}xdx =$$

$$-\frac{1}{2}\left(5e^{-4}-1\right)+\int_0^2 e^{-2x}xdx \overset{e^{-2x}=\left(\frac{e^{-2x}}{-2}\right)'}{=} -\frac{1}{2}\left(5e^{-4}-1\right)+\int_0^2\left(\frac{e^{-2x}}{-2}\right)' xdx =$$

$$-\frac{1}{2}\left(5e^{-4}-1\right)-\frac{1}{2}\int_0^2\left(e^{-2x}\right)' xdx = -\frac{1}{2}\left(5e^{-4}-1\right)-\frac{1}{2}\left\{\left[e^{-2x}x\right]_0^2 - \int_0^2 e^{-2x}(x)' dx\right\}$$

$$-\frac{1}{2}\left(5e^{-4}-1\right)-\frac{1}{2}\left[e^{-2x}x\right]_0^2+\frac{1}{2}\int_0^2 e^{-2x}dx \overset{e^{-2x}=\left(\frac{e^{-2x}}{-2}\right)'}{=}$$

$$-\frac{1}{2}\left(5e^{-4}-1\right)-\frac{1}{2}\left[2e^{-4}-0\right]+\frac{1}{2}\int_0^2\left(\frac{e^{-2x}}{-2}\right)' dx = -\frac{1}{2}\left(5e^{-4}+2e^{-4}-1\right)+\frac{1}{2}\left[\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_0^2 =$$

$$-\frac{1}{2}\left(7e^{-4}-1\right)-\frac{1}{4}\left[e^{-2x}\right]_0^2 = \frac{-7e^{-4}+1}{2}-\frac{e^{-4}-1}{4} = \frac{2\left(-7e^{-4}+1\right)-\left(e^{-4}-1\right)}{4} =$$

$$\frac{-14e^{-4}+2-e^{-4}+1}{4} = \frac{-15e^{-4}+3}{4} = \frac{-\frac{15}{e^4}+3}{4} = \frac{\frac{3e^4-15}{e^4}}{4} = \frac{3e^4-15}{4e^4}$$

59.

Θεωρούμε τη συνάρτηαση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *με τύπο*

$$f(x)=e^x+e^{-x}-x+\frac{1}{2}x^2$$

Eάν *η συνάρτηση* f *παρουσιάζει στο* x_0, *μοναδικό ακρότατο, να υπολογίσετε το όριο*

$$\lim_{x\to x_0}\left[\frac{1}{f(x)-f(x_0)}+\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{f(x)-f(x_0)}\right)\right]$$

$\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} +\infty, & 0<a<1 \\ 0, & a>1 \end{cases}}$ $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} 0, & 0<a<1 \\ +\infty, & a>1 \end{cases}}$

$$f'(x)=\left(e^x+e^{-x}-x+\frac{1}{2}x^2\right)'=e^x-e^{-x}-1+x$$

$$f''(x)=\left(e^x-e^{-x}-1+x\right)'=e^x+e^{-x}+1$$

$$\left.\begin{cases} e^x>0 \\ e^{-x}>0 \\ 1>0 \end{cases}\right\}\Rightarrow e^x+e^{-x}+1>0\Rightarrow f''(x)>0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Επειδή $f''(x)>0$ *για κάθε* $x\in\mathbb{R}$ *η* f' *είναι γνησίως αύξουσα στο* $\mathbb{R}$

$$\text{Έχω}:\left.\begin{cases} (\mathrm{I})\ \text{Η } f' \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } \mathbb{R} \\ (\mathrm{II})\ \text{Η } f' \text{ είναι συνεχής στο } \mathbb{R} \end{cases}\right\}$$

Οπότε $f'(\mathbb{R})=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=(-\infty,+\infty)$

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(e^x-e^{-x}-1+x\right)=\lim_{x\to-\infty} e^{-x}\left(\frac{e^x}{e^{-x}}-\frac{e^{-x}}{e^{-x}}-\frac{1}{e^{-x}}+\frac{x}{e^{-x}}\right)=$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-x}\left(e^{x+x}-1-e^x+\frac{x}{e^{-x}}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(e^{-1}\right)^x\left[\left(e^2\right)^x-1-e^x+\frac{x}{e^{-x}}\right]=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^x\left[\left(e^2\right)^x-1-e^x+\frac{x}{e^{-x}}\right]=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^x\left[\lim_{x\to-\infty}\left(e^2\right)^x-1-\lim_{x\to-\infty} e^x+\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}\right]=(+\infty)(0-1-0+0)=-\infty$$

$$e>1\Rightarrow 0<\frac{1}{e}<1\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^x=+\infty$$

$$e>1\Rightarrow e^2>1\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\left(e^2\right)^x=0$$

$$e>1\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} e^x=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}\left(\begin{matrix} \lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty, \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty \\ \text{Κανόνας } DLH \end{matrix}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x)'}{\left(e^{-x}\right)'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=-\lim_{x\to-\infty} e^x=0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(e^x - e^{-x} - 1 + x\right) = \lim_{x\to+\infty} e^x\left(\frac{e^x}{e^x} - \frac{e^{-x}}{e^x} - \frac{1}{e^x} + \frac{x}{e^x}\right) =$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^x\left(1 - e^{-2x} - \left(\frac{1}{e}\right)^x + \frac{x}{e^x}\right) = \lim_{x\to+\infty} e^x\left[1 - \left(e^{-2}\right)^x - \left(\frac{1}{e}\right)^x + \frac{x}{e^x}\right] =$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^x\left[1 - \left(\frac{1}{e^2}\right)^x - \left(\frac{1}{e}\right)^x + \frac{x}{e^x}\right] = \lim_{x\to+\infty} e^x\left[1 - \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e^2}\right)^x - \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^x + \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}\right] =$$

$$= (+\infty)(1 - 0 - 0 + 0) = +\infty$$

$$e > 1 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

$$e > 1 \Rightarrow e^2 > 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{e^2} < 1 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e^2}\right)^x = 0$$

$$e > 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^x = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}\left(\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty, \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \\ \text{Κανόνας } DLH\end{array}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{(x)'}{\left(e^x\right)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^x = 0$$

Επειδή $f'(\mathbb{R}) = (-\infty, +\infty)$ *και* f' *είναι γνησίως αύξουσα υπάρχει μοναδικό* x_0 *τέτοιο ώστε* $f'(x_0) = 0$.

Αν $x < x_0 \overset{f'\uparrow\mathbb{R}}{\Longrightarrow} f'(x) < f'(x_0) \overset{f'(x_0)=0}{\Longrightarrow} f'(x) < 0$

Αν $x > x_0 \overset{f'\uparrow\mathbb{R}}{\Longrightarrow} f'(x) > f'(x_0) \overset{f'(x_0)=0}{\Longrightarrow} f'(x) > 0$

$$\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\ f'(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in (-\infty, x_0) \\ (\mathrm{II})\ f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in (x_0, +\infty) \\ (\mathrm{III})\ f'(x_0) = 0\end{array}\right\}$$

Οπότε *η συνάρτηση* f *θέση* x_0 *έχει ελάχιστο στην θέση* x_0 *τον αριθμό* $f(x_0)$.

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$

Έστω η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στην θέση x_1 με $x_1 \neq x_0$

$$\begin{cases} (\mathrm{I})\ \text{Το } x_1 \text{ είναι εσωτερικό σημείο του διαστήματος } (-\infty,+\infty) \\ (\mathrm{II})\ \text{Το σημείο } x_1 \text{ είναι θέση ακρότατου} \\ (\mathrm{III})\ \text{Η συνάρτηση } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στην θέση } x_1 \end{cases}$$

Οπότε απο το θεώρημα του Fermat θα έχω $f'(x_1)=0$

$$f'(x_1)=0 \overset{f'(x_0)=0}{\Longleftrightarrow} f'(x_1)=f'(x_0) \overset{f'\uparrow \mathbb{R}}{\Longleftrightarrow} x_1=x_0 \ (\text{Άτοπο})$$

Συνεπώς η f παρουσιάζει στο x_0 μοναδικό ακρότατο.

Επειδή η συνάρτηση f έχει ελάχιστο στην θέση x_0 τον αριθμό $f(x_0)$ θα έχω:

$f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Έστω υπάρχει $x_2 \neq x_0$ με $f(x_0)=f(x_2)$

<u>Αν $x_2 < x_0$</u>

$$\begin{cases} (\mathrm{I})\ \text{Η } f \text{ είναι συνεχής στο κλειστό διαστημα } [x_2,x_0] \\ (\mathrm{II})\ \text{Η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διαστημα } (x_2,x_0) \\ (\mathrm{III})\ f(x_0)=f(x_2) \end{cases}$$

Οπότε η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο κλειστό διάστημα $[x_2,x_0]$. Οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (x_2,x_0)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f'(\xi_1)=0$

$$f'(\xi_1)=0 \overset{f'(x_0)=0}{\Longleftrightarrow} f'(\xi_1)=f'(x_0) \overset{f'\uparrow \mathbb{R}}{\Longleftrightarrow} \xi_1=x_0 \ (\text{Άτοπο γιατί } \xi_1 < x_0)$$

Αν $x_0 < x_2$

$$\begin{cases}(\text{I})\ \text{Η } f \textit{ είναι συνεχής στο κλειστό διαστημα } [x_0, x_2] \\ (\text{II})\ \text{Η } f \textit{ είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διαστημα } (x_0, x_2) \\ (\text{III})\ f(x_0) = f(x_2)\end{cases}$$

Οπότε η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο κλειστό διάστημα $[x_0, x_2]$. Οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (x_0, x_2)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f'(\xi_2) = 0$

$$f'(\xi_2) = 0 \overset{f'(x_0)=0}{\Leftrightarrow} f'(\xi_2) = f'(x_0) \overset{f'\uparrow \mathbb{R}}{\Leftrightarrow} \xi_2 = x_0 \left(\textit{Άτοπο γιατί } \xi_2 > x_0\right)$$

Οπότε για κάθε $x \neq x_0$ θα έχω $f(x) > f(x_0)$

$$\textit{Έχω}\begin{cases}(\text{I})\ f(x) - f(x_0) > 0, x \in (-\infty, x_0) \cup (x_0, +\infty) \\ (\text{II}) \lim\limits_{x \to x_0} \left[f(x) - f(x_0)\right] = 0\end{cases}$$

Οπότε $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x) - f(x_0)} = +\infty$

Αν $x \in (-\infty, x_0) \cup (x_0, +\infty)$ θα έχω:

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{f(x) - f(x_0)}\right) \geq -1 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{f(x) - f(x_0)} + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{f(x) - f(x_0)}\right) \geq \frac{1}{f(x) - f(x_0)} - 1$$

$$\begin{cases}(\text{I}) \dfrac{1}{f(x) - f(x_0)} + \sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{1}{f(x) - f(x_0)}\right) \geq \dfrac{1}{f(x) - f(x_0)} - 1 \\ \textit{για κάθε } x \in (-\infty, x_0) \cup (x_0, +\infty) \\ (\text{II}) \lim\limits_{x \to x_0} \left[\dfrac{1}{f(x) - f(x_0)} - 1\right] = +\infty\end{cases}$$

Οπότε $\lim\limits_{x \to x_0} \left[\dfrac{1}{f(x) - f(x_0)} + \sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{1}{f(x) - f(x_0)}\right)\right] = +\infty$

60.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = xe^{1-x}$ και $g(x) = \begin{cases} f(x), & x \leq 1 \\ f(2-x), & x > 1 \end{cases}$

(I) Να βρεθεί το σύνολο τιμών τους

(II) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $x = 1$ είναι άξονας συμμετρίας της γραφικής παράστασης της g

(III) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 1$ ισχύει:

$$f(x) > f(2-x)$$

$$(\mathrm{I})\ f'(x)=e^{1-x}+x(1-x)'e^{1-x}=e^{1-x}-xe^{1-x}=e^{1-x}(1-x)$$

$$f'(x)\geq 0\Leftrightarrow e^{1-x}(1-x)\geq 0\Leftrightarrow 1-x\geq 0\Leftrightarrow -x\geq -1\Leftrightarrow \frac{-x}{-1}\leq\frac{-1}{-1}\Leftrightarrow x\leq 1$$

$$f'(x)>0\Leftrightarrow x<1$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$$

$$f'(x)<0\Leftrightarrow x>1$$

$$\acute{E}\chi\omega:\left.\begin{cases}(\mathrm{I})\ f'(x)>0\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in(-\infty,1)\\(\mathrm{II})\ \mathrm{H}\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ (-\infty,1]\end{cases}\right\}\ \acute{A}\rho\alpha\ f\underset{\wedge}{\uparrow}(-\infty,1]$$

$$\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ f'(x)<0\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in(1,+\infty)\ \acute{\varepsilon}\chi\omega\ f\overset{\vee}{\downarrow}(1,+\infty)$$

$$\acute{E}\chi\omega:\left.\begin{cases}(\mathrm{I})\ f\underset{\wedge}{\uparrow}\ \sigma\tau o\ (-\infty,1]\\(\mathrm{II})\ \mathrm{H}\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ (-\infty,1]\end{cases}\right\}$$

$$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon:f(-\infty,1]=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),f(1)\right]=(-\infty,1]$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}xe^{1-x}=\lim_{x\to-\infty}x\lim_{x\to-\infty}e^{1-x}=(-\infty)(+\infty)=-\infty$$

$$\Theta\acute{\varepsilon}\tau\omega:t=1-x.\ \acute{E}\chi\omega:x\to-\infty\Rightarrow 1-x\to-\infty\Rightarrow t\to+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}e^{1-x}=\lim_{t\to+\infty}e^{t}=+\infty$$

$$f(1)=1\bullet e^{0}=1$$

$$\acute{E}\chi\omega:\left.\begin{cases}(\mathrm{I})\ f\overset{\vee}{\downarrow}\ \sigma\tau o(1,+\infty)\\(\mathrm{II})\ \mathrm{H}\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o(1,+\infty)\end{cases}\right\}$$

$$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon:f(1,+\infty)=\left(\lim_{x\to+\infty}f(x),\lim_{x\to1^{+}}f(x)\right)=(0,1)$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}xe^{1-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\frac{1}{e^{1-x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{-(1-x)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x-1}}=$$

$$\left(\lim_{x\to+\infty}e^{x-1}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty\ \mathrm{K}\alpha\nu\acute{o}\nu\alpha\varsigma\ DLH\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x)'}{\left(e^{x-1}\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x-1}}=0\left(\lim_{x\to+\infty}e^{x-1}=+\infty\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x-1}}=0\right)$$

$$f(\mathbb{R})=f(-\infty,1]\cup f(1,+\infty)\overset{\substack{f(-\infty,1]=(-\infty,1]\\ f(1,+\infty)=(0,1)}}{=}(-\infty,1]\cup(0,1)=(-\infty,1]$$

$$g(x)=\begin{cases}f(x),\ x\le 1\\ f(2-x),\ x>1\end{cases}$$

$$g(-\infty,1]=\{y=g(x)\,/\,x\in(-\infty,1]\}\overset{g(x)=f(x),x\in(-\infty,1]}{=}\{y=f(x)\,/\,x\in(-\infty,1]\}=$$
$$f(-\infty,1]=(-\infty,1]$$

$$x\in(1,+\infty)\Leftrightarrow x>1\Leftrightarrow -x<-1\Leftrightarrow 2-x<2-1\Leftrightarrow 2-x\in(-\infty,1)$$

Οπότε : $x\in(1,+\infty)\Leftrightarrow 2-x\in(-\infty,1)$

$$g(1,+\infty)=\{y=g(x)\,/\,x\in(1,+\infty)\}\overset{g(x)=f(2-x),\ x>1}{=}\{y=f(2-x)\,/\,x\in(1,+\infty)\}$$

Επειδή ισχύει η ισοδυναμία $x\in(1,+\infty)\Leftrightarrow 2-x\in(-\infty,1)$ μπορώ να αντικαταστήσω την συνθήκη $x\in(1,+\infty)$ με την $2-x\in(-\infty,1)$

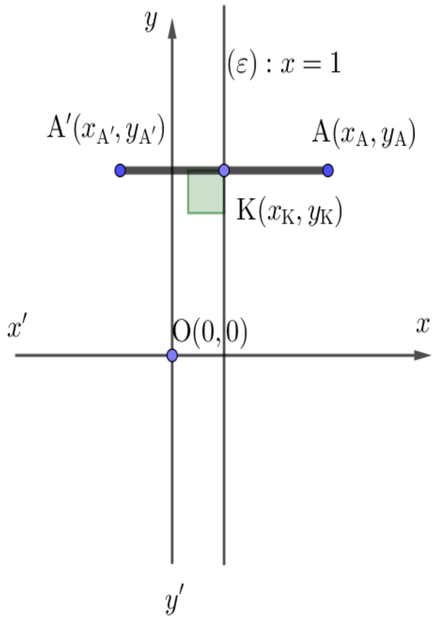
$$g(1,+\infty)=\{y=f(2-x)\,/\,x\in(1,+\infty)\}=\{y=f(2-x)\,/\,2-x\in(-\infty,1)\}=$$
$$\overset{\text{Θέτω}: t=2-x}{=}\{y=f(t)\,/\,t\in(-\infty,1)\}=f(-\infty,1)=(-\infty,1)$$

Επειδή $f'(x)>0$ *για κάθε* $x\in(-\infty,1)$ *έχω* $f\underset{\wedge}{\uparrow}(-\infty,1)$

$$\text{Έχω}:\left.\begin{cases}(\mathrm{I})\ f\underset{\wedge}{\uparrow}(-\infty,1)\\ (\mathrm{II})\ \text{Η } f \text{ είναι συνεχής στο } (-\infty,1)\end{cases}\right\}$$

Οπότε : $f(-\infty,1)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to1^{+}}f(x)\right)=(-\infty,1)$

$$g(\mathbb{R})=g(-\infty,1]\cup g(1,+\infty)\overset{\substack{g(-\infty,1]=(-\infty,1]\\ g(1,+\infty)=(-\infty,1)}}{=}(-\infty,1]\cup(-\infty,1)=(-\infty,1]$$



(II) *Έστω* $\mathrm{A}(x_{\mathrm{A}}, y_{\mathrm{A}})$ *σημείο της* C_g *τότε θα έχω* $y_{\mathrm{A}} = g(x_{\mathrm{A}})$. Αν $\mathrm{A}'(x_{\mathrm{A}'}, y_{\mathrm{A}'})$ *το συμμετρικό του* $\mathrm{A}(x_{\mathrm{A}}, y_{\mathrm{A}})$ *ως προς την ευθεία* $(\varepsilon): x=1$. Τ*ότε θα έχω*:

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{A}'\mathrm{A} \perp (\varepsilon) \\ \mathrm{K}(x_{\mathrm{K}}, y_{\mathrm{K}}) \text{ μέσο του } \mathrm{A}'\mathrm{A} \\ \mathrm{K}(x_{\mathrm{K}}, y_{\mathrm{K}}) \in (\varepsilon) \end{array}\right\}$$

Ε*πειδή* $\mathrm{K}(x_{\mathrm{K}}, y_{\mathrm{K}})$ *μέσο του* $\mathrm{A}'\mathrm{A}$ *θα έχω*:

$$\boxed{x_{\mathrm{K}} = \frac{x_{\mathrm{A}} + x_{\mathrm{A}'}}{2}}$$

$$\mathrm{K}(x_{\mathrm{K}}, y_{\mathrm{K}}) \in (\varepsilon) \Leftrightarrow x_{\mathrm{K}} = 1 \Leftrightarrow \frac{x_{\mathrm{A}} + x_{\mathrm{A}'}}{2} = 1 \Leftrightarrow x_{\mathrm{A}'} = 2 - x_{\mathrm{A}}$$

Ε*πειδή* $\mathrm{A}'\mathrm{A} \perp (\varepsilon)$ *και* $(\varepsilon) \perp x'x$ *θα έχω* $\mathrm{A}'\mathrm{A} // x'x$. Ο*πότε* $\overrightarrow{\mathrm{A}'\mathrm{A}} // x'x$

Έχω: $\overrightarrow{\mathrm{A}'\mathrm{A}} = (x_{\mathrm{A}} - x_{\mathrm{A}'}, y_{\mathrm{A}} - y_{\mathrm{A}'})$

Ε*πειδή* $\overrightarrow{\mathrm{A}'\mathrm{A}} // x'x \Leftrightarrow y_{\overrightarrow{\mathrm{A}'\mathrm{A}}} = 0 \Leftrightarrow y_{\mathrm{A}} - y_{\mathrm{A}'} = 0 \Leftrightarrow y_{\mathrm{A}'} = y_{\mathrm{A}} \overset{y_{\mathrm{A}} = g(x_{\mathrm{A}})}{\Longleftrightarrow}$

$y_{\mathrm{A}'} = g(x_{\mathrm{A}})$

Η *ευθεία* $x=1$ *είναι άξονας συμμετρίας της γραφικής παράστασης της* g *αν και μόνο αν το συμμετρικό κάθε σημείου* $\mathrm{A}(x_{\mathrm{A}}, y_{\mathrm{A}})$ *της* C_g *ανήκει στην* C_g. *Οπότε το* $\mathrm{A}'(x_{\mathrm{A}'}, y_{\mathrm{A}'})$ *για να ανήκει στην* C_g *θα πρέπει να ισχύει*: $y_{\mathrm{A}'} = g(x_{\mathrm{A}'})$

$$\begin{Bmatrix} y_{\mathrm{A}'} = g(x_{\mathrm{A}'}) \\ y_{\mathrm{A}'} = g(x_{\mathrm{A}}) \end{Bmatrix} \overset{x_{\mathrm{A}'}=2-x_{\mathrm{A}}}{\Longleftrightarrow} \begin{Bmatrix} y_{\mathrm{A}'} = g(2-x_{\mathrm{A}}) \\ y_{\mathrm{A}'} = g(x_{\mathrm{A}}) \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} g(x_{\mathrm{A}}) = g(2-x_{\mathrm{A}}) \\ y_{\mathrm{A}'} = g(x_{\mathrm{A}}) \end{Bmatrix}$$

Συνεπώς η ευθεία $x=1$ *είναι άξονας συμμετρίας της* C_g *αν και μόνο αν για κάθε* $x \in \mathbb{R}$ *ισχύει* $g(x) = g(2-x)$

$$\text{Διακρίνω τις περιπτώσεις}: \begin{Bmatrix} (\mathrm{I})\ x<1 \\ (\mathrm{II})\ x=1 \\ (\mathrm{III})\ x>1 \end{Bmatrix}$$

Περίπτωση (I): $x<1$

Επειδή $x<1$ *θα έχω*: $g(x) = f(x)$

$x<1 \Leftrightarrow -x>-1 \Leftrightarrow 2-x>2-1 \Leftrightarrow 2-x>1$

Επειδή $2-x>1$ *θα έχω*:

$$g(2-x) = f\left[2-(2-x)\right] = f(2-2+x) = f(x)$$

$$\begin{Bmatrix} g(x) = f(x) \\ g(2-x) = f(x) \end{Bmatrix} \Rightarrow g(x) = g(2-x)$$

Περίπτωση (II): $x=1$

$$g(2-x) \overset{x=1}{=} g(2-1) = g(1) \overset{x=1}{=} g(x) \Rightarrow g(2-x) = g(x)$$

Περίπτωση (II): $x>1$

Επειδή $x>1$ *θα έχω*:

$$g(x) = f(2-x)$$

$x>1 \Leftrightarrow -x<-1 \Leftrightarrow 2-x<2-1 \Leftrightarrow 2-x<1$

Επειδή $2-x<1$ θα έχω:

$g(2-x)=f(2-x)$

$$\left.\begin{cases} g(x)=f(2-x) \\ g(2-x)=f(2-x) \end{cases}\right\} \Rightarrow g(2-x)=g(x)$$

Οπότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $g(x)=g(2-x)$. Συνεπώς η ευθεία $x=1$ είναι άξονας συμμετρίας της C_g.

(III) $f'(x)=e^{1-x}(1-x)$

Θεωρώ την συνάρτηση $h(x)=f(x)-f(2-x), x\in[1,+\infty)$

$$h'(x)=f'(x)-(2-x)'f'(2-x)=f'(x)+f'(2-x)=$$

$$=e^{1-x}(1-x)+e^{1-(2-x)}\left[1-(2-x)\right]=e^{1-x}(1-x)+e^{-1+x}(-1+x)=$$

$$e^{-(x-1)}\left[-(x-1)\right]+e^{x-1}(x-1)=-\frac{(x-1)}{e^{x-1}}+e^{x-1}(x-1)=(x-1)\frac{e^{2(x-1)}-1}{e^{x-1}}$$

Αν $x>1$ θα έχω:

$$x>1 \Rightarrow x-1>0 \Rightarrow \left.\begin{cases} 2(x-1)>0 \\ x-1>0 \end{cases}\right\} \Rightarrow \left.\begin{cases} e^{2(x-1)}>e^0 \\ x-1>0 \end{cases}\right\} \Rightarrow \left.\begin{cases} e^{2(x-1)}-1>0 \\ x-1>0 \\ e^{x-1}>0 \end{cases}\right\} \Rightarrow$$

$$(x-1)\frac{e^{2(x-1)}-1}{e^{x-1}}>0 \Rightarrow h'(x)>0$$

$$Έχω: \left.\begin{cases} (\mathrm{I})\ h'(x)>0 \text{ για κάθε } x\in(1,+\infty) \\ (\mathrm{II})\ \text{Η } h \text{ είναι συνεχής στο } [1,+\infty) \end{cases}\right\} \text{Οπότε } h\underset{\wedge}{\uparrow} \text{ στο } [1,+\infty)$$

Αν $x>1$ θα έχω:

$$x>1 \overset{h\underset{\wedge}{\uparrow}[1,+\infty)}{\Longrightarrow} h(x)>h(1) \Rightarrow h(x)>h(1) \overset{h(x)=f(x)-f(2-x)}{\Longrightarrow} f(x)-f(2-x)>f(1)-f(1)$$

$$f(x)-f(2-x)>0 \Rightarrow f(x)>f(2-x)$$

61.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $D=[a,b]$ και $\int_a^b f(x)dx \neq 0$.

Να δειχτεί ότι για κάθε $\lambda \in (0,1)$ είναι $\lambda \int_a^b f(x)dx = \int_a^{\xi} f(x)dx$ για κάποιο $\xi \in (a,b)$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $D=[a,b]$ τότε η συνάρτηση

$G(x)=\int_a^x f(t)dt,\ x\in[a,b]$ είναι αρχική συνάρτηση της f. Συνεπώς

η G είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη. Θεωρώ την συνάρτηση

$$h(x)=\lambda\int_a^b f(u)du-\int_a^x f(t)dt,\ x\in[a,b]$$

Η συνάρτηση είναι συνεχής στο $[a,b]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων

$$h(\alpha)=\lambda\int_a^b f(u)du-\int_a^\alpha f(t)dt\overset{\int_a^\alpha f(t)dt=0}{=}\lambda\int_a^b f(u)du=\lambda\int_a^b f(x)dx$$

$$h(b)=\lambda\int_a^b f(u)du-\int_a^b f(t)dt\overset{\int_a^b f(u)du=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(x)dx}{=}\lambda\int_a^b f(x)dx-\int_a^b f(x)dx=$$

$$(\lambda-1)\int_a^b f(x)dx$$

$$h(\alpha)h(b)=\lambda\int_a^b f(x)dx(\lambda-1)\int_a^b f(x)dx=\lambda(\lambda-1)\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2<0$$

$$\left\{\begin{matrix}0<\lambda<1\\ \int_a^b f(x)dx\neq 0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}\lambda>0,\lambda-1<0\\ \left(\int_a^b f(x)dx\right)^2>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\lambda(\lambda-1)\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2<0\Rightarrow$$

$$h(\alpha)h(b)<0$$

$$\left\{\begin{matrix}(\mathrm{I})\ \text{Η } h \text{ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα } [a,b]\\ (\mathrm{II})\ h(\alpha)h(b)<0\end{matrix}\right\}$$

Άρα η συνάρτηση h ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρημάτος του Bolzano στο κλειστό διάστημα $[a,b]$. Οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(a,b)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $h(\xi)=0$

$$\left\{\begin{matrix}h(\xi)=0\\ \xi\in(a,b)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}\lambda\int_a^b f(x)dx-\int_a^\xi f(x)dx=0\\ \xi\in(a,b)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}\lambda\int_a^b f(x)dx=\int_a^\xi f(x)dx\\ \xi\in(a,b)\end{matrix}\right\}$$

62.

$\Delta\acute{\iota}\nu\varepsilon\tau\alpha\iota\ \eta\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta: f(x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}$

$\text{N}.\delta.o: \int_0^1 f\left(f(x)\right)dx=1$

$$f(x)+f(1-x)=\frac{4^x}{4^x+2}+\frac{4^{1-x}}{4^{1-x}+2}=\frac{4^x}{4^x+2}+\frac{\frac{4}{4^x}}{\frac{4}{4^x}+2}=\frac{4^x}{4^x+2}+\frac{\frac{4}{\cancel{4^x}}}{\frac{4+2\bullet 4^x}{\cancel{4^x}}}=$$

$$\frac{4^x}{4^x+2}+\frac{4}{2\left(4^x+2\right)}=\frac{4^x}{4^x+2}+\frac{2}{4^x+2}=\frac{4^x+2}{4^x+2}=1$$

Αν $x+y=1$ θα έχω $y=1-x$. Τότε θα ισχύει:

$$f(x)+f(1-x)=1\overset{y=1-x}{\Longrightarrow} f(x)+f(y)=1$$

<u>Οπότε αν $x+y=1$ θα έχω $f(x)+f(y)=1$</u>

Θέτω: $I=\int_0^1 f\left(f(x)\right)dx$ και $J=\int_0^1 f\left(f(1-x)\right)dx$

<u>Θέτω: $x=1-t$</u>

$x=0:0=1-t\Leftrightarrow t=1$

$x=1:1=1-t\Leftrightarrow t=0$

$dx=-dt$

$$I=\int_0^1 f\left(f(x)\right)dx=\int_1^0 f\left(f(1-t)\right)(-dt)=-\left(-\int_0^1 f\left(f(1-t)\right)dt\right)=$$

$$\int_0^1 f\left(f(1-x)\right)dx=J$$

Επειδή $x+(1-x)=1$ θα έχω: $f(1-x)+f(x)=1$

Τότε θα ισχύει: $f\left(f(1-x)\right)+f\left(f(x)\right)=1$

$$I+J=\int_0^1 f\left(f(x)\right)dx+\int_1^0 f\left(f(1-x)\right)dx=\int_0^1\left[f\left(f(x)\right)+f\left(f(1-x)\right)\right]dx=$$

$$\int_0^1 dx=\left[x\right]_0^1=1-0=1$$

$$I+J=1\overset{I=J}{\Longrightarrow} I+I=1\Rightarrow 2I=1\Rightarrow I=\frac{1}{2}$$

63.

Δίνεται η συνάρτηση : $f\left(x\right)=4x^3+3ax^2-2$, όπου α είναι ένας σταθερός θετικός αριθμός.

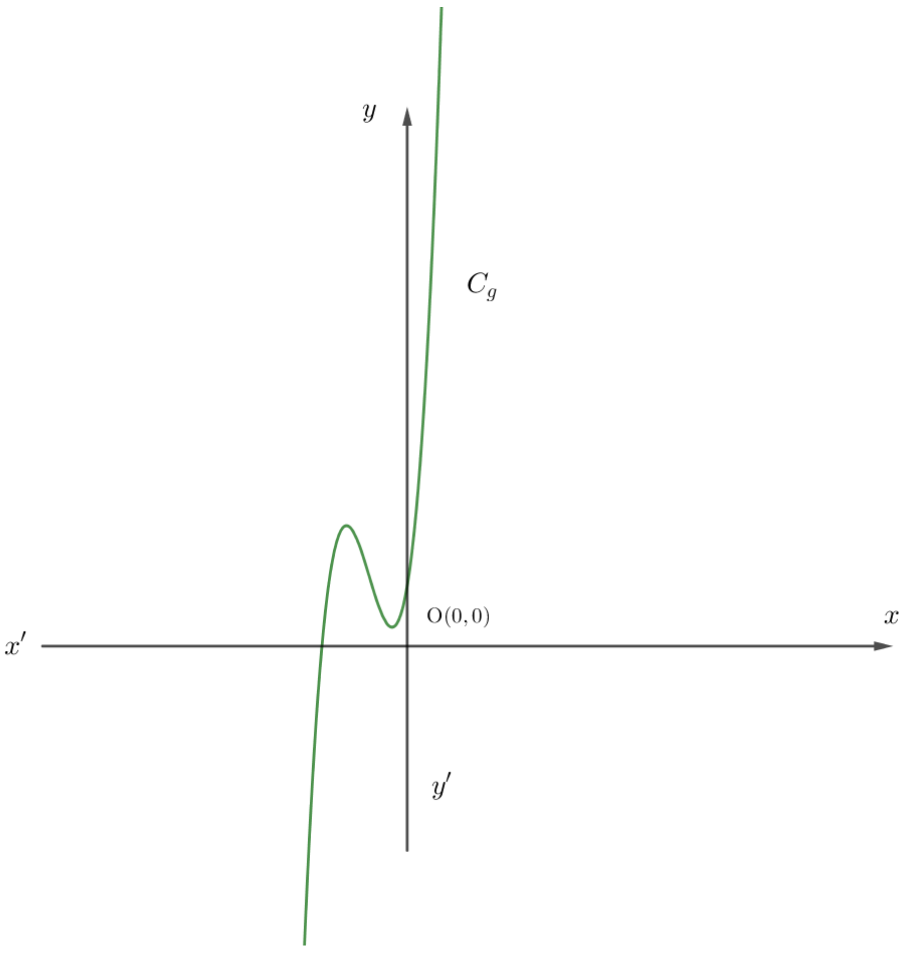
Γνωρίζουμε ότι η εξίσωση $\left(\ln\alpha-\int_0^1 f\left(t\right)dt\right)y+1=0$ δεν παριστάνει εξίσωση ευθείας

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^3\left(x\right)+f\left(x\right)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα x_0 στο διάστημα $\left(0,1\right)$

γ) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{e^{f(x)}-1}{\left(x-x_0\right)^5}$ όπου το x_0 του β) ερωτήματος

δ) Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $g\left(x\right)=8x^3+15x^2+6x+1$. Να αποδείξετε ότι το σημείο $\mathrm{A}\left(-1,-1\right)$ διέρχεται μοναδική εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.



$\underline{\text{Η } \textit{εξίσωση } \mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma=0 \textit{ δεν παριστάνει ευθεία αν και μόνο αν}}$

$\underline{\textit{ισχύει } \mathrm{A}=\mathrm{B}=0}$. Ο$\textit{πότε η εξίσωση }$ $0x+\left(\ln\alpha-\int_0^1 f(t)\,dt\right)y+1=0$ $\textit{δεν}$

$\textit{παριστάνει εξίσωση ευθείας αν και μόνο αν ισχύει}:$

$$\ln\alpha-\int_0^1 f(t)\,dt=0\Leftrightarrow \ln\alpha=\int_0^1 f(t)\,dt\Leftrightarrow \ln\alpha=\int_0^1\left(4t^3+3at^2-2\right)dt\Leftrightarrow$$

$$\ln\alpha=\left[\frac{4t^4}{4}+3\alpha\frac{t^3}{3}-2t\right]_0^1\Leftrightarrow \ln\alpha=\left[t^4+\alpha t^3-2t\right]_0^1\Leftrightarrow$$

$$\ln\alpha=\alpha-1\Leftrightarrow\alpha=1$$

$\underline{\Gamma\textit{ια κάθε } x>0 \textit{ ισχύει } \ln x\le x-1.\ \text{Η } \textit{ισότητα ισχύει αν και μόνο αν } x=1}$

Τ$\textit{ότε θα έχω}: f(x)=4x^3+3x^2-2$

$\beta)\ f^3(x)+f(x)=0\Leftrightarrow f(x)\left[f^2(x)+1\right]=0\Leftrightarrow f(x)=0$

$\left(f^2(x)\ge0\Rightarrow f^2(x)+1\ge1>0\Rightarrow f^2(x)+1>0\Rightarrow f^2(x)+1\ne0\right)$

$$\textit{Έχω}: f(0)f(1)\overset{\substack{f(0)=-2\\ f(1)=5}}{=}-2\bullet5=-10<0$$

$$\left\{\begin{matrix}(\mathrm{I})\ \text{Η } f \textit{ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα } [0,1] \textit{ ως πολυωνυμική}\\ (\mathrm{II})\ f(0)\,f(1)<0\end{matrix}\right\}$$

Ο$\textit{πότε η συνάρτηση } f \textit{ ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος}$ $\textit{του}$ Bolzano $\textit{στο κλειστό διάστημα}$ $[0,1]$. $\textit{Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον}$ $x_0\in(0,1)$ $\textit{με}$ $f(x_0)=0$

$\gamma)\ f'(x)=12x^2+6x$

$$\lim_{x\to x_0}e^{f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}\overset{\substack{\text{Η } f \textit{ είναι συνεχής στο}\\ x_0 \textit{ οπότε θα ισχύει}\\ \lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)=0}}{=}e^0=1$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{e^{f(x)}-1}{(x-x_0)^5}\left(\begin{matrix}\lim\limits_{x\to x_0}\left(e^{f(x)}-1\right)=\lim\limits_{x\to x_0}(x-x_0)^5=0\\ \text{Κ}\textit{ανόνας του De L'Hospital}\end{matrix}\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{\left(e^{f(x)}-1\right)'}{\left[(x-x_0)^5\right]'}=$$

$$=\frac{1}{5}\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\left(x-x_0\right)^4}\lim_{x\to x_0}e^{f(x)}\lim_{x\to x_0}f'\left(x\right)\overset{\substack{\text{Η } f' \text{ είναι συνεχής στο} \\ x_0 \text{ οπότε θα ισχύει} \\ \lim\limits_{x\to x_0} f'(x)=f'(x_0)}}{=}$$

$$\frac{1}{5}\left(+\infty\right)\bullet 1\bullet\left(12{x_0}^2+6x_0\right)=+\infty$$

$$x_0\in\left(0,1\right)\Rightarrow x_0>0\Rightarrow\left.\begin{cases}12{x_0}^2>0\\6x_0>0\end{cases}\right\}\Rightarrow 12{x_0}^2+6x_0>0$$

δ)*Έστω* $\left(\varepsilon\right)$ *η εφαπτομένη της* C_f *στο σημείο επαφής* $\mathrm{M}\left(x_1,f\left(x_1\right)\right)$ *και* $\mathrm{A}\left(-1,-1\right)\in\left(\varepsilon\right)$. Η *ευθεία* $\left(\varepsilon\right)$ *θα έχει εξίσωση*:

$$y-f\left(x_1\right)=f\left(x_1\right)\left(x-x_1\right)\Leftrightarrow y-4{x_1}^3-3{x_1}^2+2=\left(12{x_1}^2+6x_1\right)\left(x-x_1\right)$$

Ε*πειδή* $\mathrm{A}\left(-1,-1\right)\in\left(\varepsilon\right)$ *θα έχω*:

$$y_{\mathrm{A}}-4{x_1}^3-3{x_1}^2+2=\left(12{x_1}^2+6x_1\right)\left(x_{\mathrm{A}}-x_1\right)\overset{\substack{y_{\mathrm{A}}=-1\\x_{\mathrm{A}}=-1}}{\Longleftrightarrow}$$

$$-1-4{x_1}^3-3{x_1}^2+2=\left(12{x_1}^2+6x_1\right)\left(-1-x_1\right)\Leftrightarrow$$

$$-12{x_1}^2-6x_1-12{x_1}^3-6{x_1}^2+4{x_1}^3+3{x_1}^2-1=0\Leftrightarrow$$

$$-8{x_1}^3-15{x_1}^2-6x_1-1=0\Leftrightarrow 8{x_1}^3+15{x_1}^2+6x_1+1=0\Leftrightarrow g\left(x_1\right)=0$$

Ο*πότε υπάρχει εφαπτομένη της* C_f *που να διέρχεται απο το σημείο* $\mathrm{A}\left(-1,-1\right)$ *αν και μόνο η* C_g *τέμνει τον* $y'y$. Ι*σχύει απο την γραφική παράσταση της* g. Υ*πάρχει μοναδική εφαπτομένη της* C_f *που να διέρχεται απο το σημείο* $\mathrm{A}\left(-1,-1\right)$ *αν και μόνο η* C_g *τέμνει τον* $y'y$ *σε ένα και μόνο σημείο*.Ι*σχύει απο την γραφική παράσταση της* g.

64.

Δ*ίνεται η συνεχής συνάρτηση* $f:\left[\alpha,\beta\right]\to\left[\gamma,\delta\right]$ *με* $\alpha<\beta$ *και* $\gamma+\delta\neq 0$ *και ακόμα* $\int\limits_{\alpha}^{\beta}f\left(x\right)dx=\frac{\gamma\delta}{\gamma+\delta}\left(\beta-\alpha\right)$.Ν*α δειχθεί ότι η* f *είναι σταθερή συνάρτηση*.

$$\int_{\alpha}^{\beta} dx = \left[x\right]_{\alpha}^{\beta} = \beta - \alpha$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \frac{\gamma\delta}{\gamma+\delta}(\beta-\alpha) \overset{\int_{\alpha}^{\beta} dx = \beta - \alpha}{\Longleftrightarrow} \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \frac{\gamma\delta}{\gamma+\delta}\int_{\alpha}^{\beta} dx \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\gamma\delta}{\gamma+\delta} dx$$

$$\Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\gamma\delta}{\gamma+\delta} dx = 0 \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta}\left[f(x) - \frac{\gamma\delta}{\gamma+\delta}\right]dx = 0$$

Για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ έχω:

$$\gamma \le f(x) \le \delta \Leftrightarrow \gamma - \frac{\gamma\delta}{\gamma+\delta} \le f(x) - \frac{\gamma\delta}{\gamma+\delta} \le \delta - \frac{\gamma\delta}{\gamma+\delta} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\gamma^2 + \gamma\delta - \gamma\delta}{\gamma+\delta} \le f(x) - \frac{\gamma\delta}{\gamma+\delta} \le \frac{\delta\gamma + \delta^2 - \gamma\delta}{\gamma+\delta} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\gamma^2}{\gamma+\delta} \le f(x) - \frac{\gamma\delta}{\gamma+\delta} \le \frac{\delta^2}{\gamma+\delta}$$

$$\frac{\gamma^2}{\gamma+\delta}\frac{\delta^2}{\gamma+\delta} = \frac{\gamma^2\delta^2}{(\gamma+\delta)^2} \ge 0$$

Αν $\frac{\gamma^2}{\gamma+\delta}\frac{\delta^2}{\gamma+\delta} = 0$

$$\frac{\gamma^2}{\gamma+\delta}\frac{\delta^2}{\gamma+\delta} = 0 \Leftrightarrow \gamma^2\delta^2 = 0 \Leftrightarrow \gamma = 0 \text{ ή } \delta = 0$$

Αν $\gamma = 0$ τότε θα έχω:

$$f(x) - \frac{\gamma\delta}{\gamma+\delta} \ge \frac{\gamma^2}{\gamma+\delta} = \frac{0^2}{\gamma+\delta} = 0 \Rightarrow f(x) - \frac{\gamma\delta}{\gamma+\delta} \ge 0$$

Οπότε η συνάρτηση $f(x) - \frac{\gamma\delta}{\gamma+\delta}$ έχει σταθερό πρόσημο

Αν $\delta = 0$ τότε θα έχω:

$$f(x) - \frac{\gamma\delta}{\gamma+\delta} \le \frac{\delta^2}{\gamma+\delta} = \frac{0^2}{\gamma+\delta} = 0 \Rightarrow f(x) - \frac{\gamma\delta}{\gamma+\delta} \le 0$$

Οπότε η συνάρτηση $f(x) - \frac{\gamma\delta}{\gamma+\delta}$ έχει σταθερό πρόσημο

Αν $\frac{\gamma^2}{\gamma+\delta}\frac{\delta^2}{\gamma+\delta} > 0$

Αν $\frac{\gamma^2}{\gamma+\delta}\frac{\delta^2}{\gamma+\delta} > 0$ τότε $\frac{\gamma^2}{\gamma+\delta}, \frac{\delta^2}{\gamma+\delta}$ ομόσημοι. Επειδή

$\frac{\gamma^2}{\gamma+\delta} \le f(x) - \frac{\gamma\delta}{\gamma+\delta} \le \frac{\delta^2}{\gamma+\delta}$ δηλαδή παρεμβάλεται μεταξύ δυο ομόσημων αριθμών θα έχει σταθερό πρόσημο

$$\text{Έχω}: \left\{ \begin{array}{l} (\mathrm{I})\,\text{Η } f(x) - \frac{\gamma\delta}{\gamma+\delta} \text{ είναι συνεχής στο } [\alpha,\beta] \\ (\mathrm{II}) \int_\alpha^\beta \left[f(x) - \frac{\gamma\delta}{\gamma+\delta} \right] dx = 0 \\ (\mathrm{III})\,\text{Η } f(x) - \frac{\gamma\delta}{\gamma+\delta} \text{ έχει σταθερό πρόσημο στο } [\alpha,\beta] \end{array} \right\}$$

$$\text{Οπότε}: \left\{ \begin{array}{l} f(x) - \frac{\gamma\delta}{\gamma+\delta} = 0 \\ x \in [\alpha,\beta] \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{\gamma\delta}{\gamma+\delta} \\ x \in [\alpha,\beta] \end{array} \right\}$$

65.

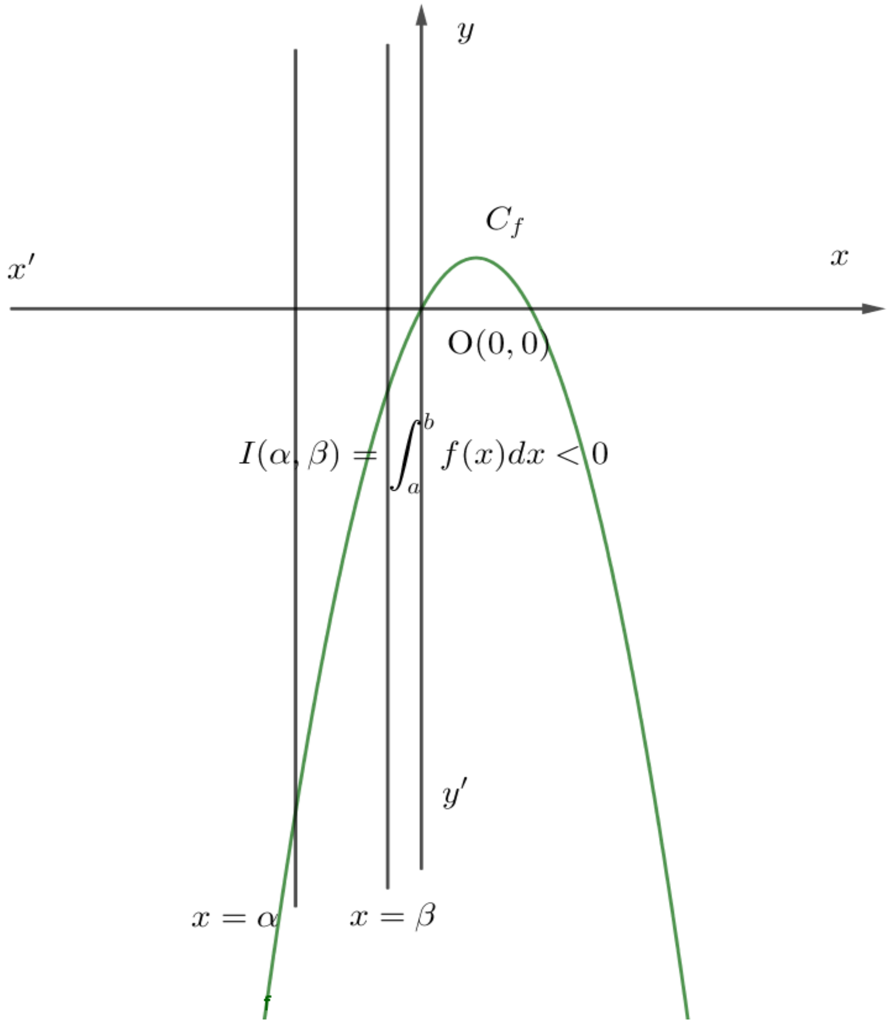
Δίνονται α, β τυχαίοι πραγματικοί αριθμοί με $\alpha < \beta$. Ορίζουμε την τιμή $\mathrm{I}(\alpha,\beta) = \beta^2 - \alpha^2 - \frac{\beta^3 - \alpha^3}{3}$. Να δειχτεί ότι το $\mathrm{I}(\alpha,\beta)$ έχει μέγιστο και να βρεθεί η μέγιστη τιμή του.

Δίνεται $\mathrm{I}(\alpha,\beta) = \int_\alpha^\beta (2x - x^2)\,dx$

$\Theta\varepsilon\omega\rho\acute{\omega}\ \tau\eta\nu\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f\left(x\right)=2x-x^2.\ \acute{E}\chi\omega\ \mathrm{I}\left(\alpha,\beta\right)=\int_{\alpha}^{\beta} f\left(x\right)dx.$

$\Delta\iota\alpha\kappa\rho\acute{\iota}\nu\omega\ \tau\iota\varsigma\ \pi\varepsilon\rho\iota\pi\tau\acute{\omega}\sigma\varepsilon\iota\varsigma:\left\{\begin{matrix}\left(\mathrm{I}\right)\beta<0\\ \left(\mathrm{II}\right)0\le\beta\le 2\\ \left(\mathrm{III}\right)\beta>2\end{matrix}\right\}$

$\underline{\Pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\pi\tau\omega\sigma\eta\left(\mathrm{I}\right):}\ \beta<0$



y
C_f
x'
x
$O(0,0)$
$I(\alpha,\beta) = \int_a^b f(x)dx < 0$
y'
$x = \alpha$
$x = \beta$

<u>$\Pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\pi\tau\omega\sigma\eta\ (\mathrm{II})$</u>$: 0 \le \beta \le 2$

$$\mathrm{I}(\alpha,\beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\beta} f(x)dx$$

Επειδή $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [\alpha, 0)$ θα έχω $\int_{\alpha}^{0} f(x)dx < 0$

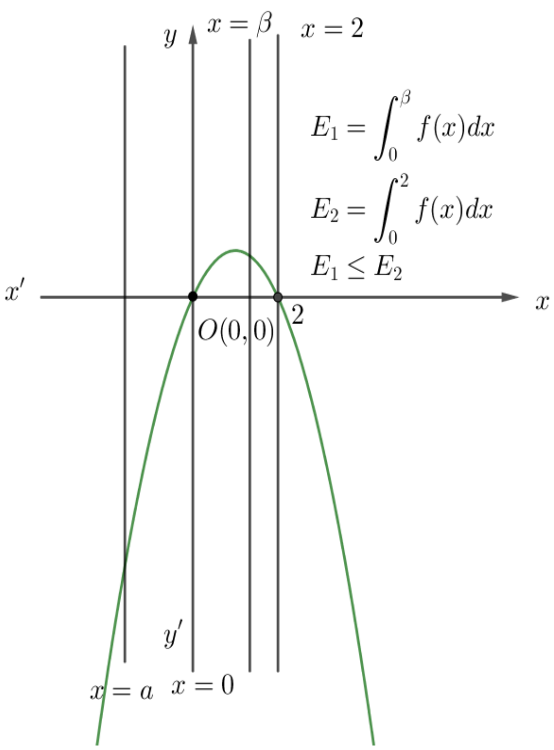
Αν E_1 το εμβαδό του χωρίου που περικλύεται απο την C_f και τις ευθείες $x = 0, x = \beta$ και τον άξονα $x'x$ θα έχω $\int_{0}^{\beta} f(x)dx = \mathrm{E}_1$

Αν E_2 το εμβαδό του χωρίου που περικλύεται απο την C_f και τις ευθείες $x = 0, x = 2$ και τον άξονα $x'x$ θα έχω $\int_{0}^{1} f(x)dx = \mathrm{E}_2$

Έχω $\mathrm{E}_1 \le \mathrm{E}_2$. Αν $\beta = 2$ τότε $\mathrm{E}_1 = \mathrm{E}_2$

$$\mathrm{E}_2 = \int_{0}^{1} \left(2x - x^2\right)dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 2^2 - \frac{2^3}{3} - \left(0^2 - \frac{0^3}{3}\right) = \frac{12}{3} - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}\ \tau.\mu$$

$$\left\{\begin{array}{l} \int_{\alpha}^{0} f(x)dx < 0 \\ \mathrm{E}_1 \le \mathrm{E}_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \int_{\alpha}^{0} f(x)dx + \mathrm{E}_1 \le \mathrm{E}_2 \Rightarrow \mathrm{I}(\alpha,\beta) \le \mathrm{E}_2$$



$\underline{\Pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\pi\tau\omega\sigma\eta\,(\mathrm{III})}:\beta>0$

$$\mathrm{I}(\alpha,\beta)=\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx=\int_{\alpha}^{0}f(x)dx+\underbrace{\int_{0}^{2}f(x)dx}_{}+\int_{0}^{\beta}f(x)dx\overset{\int_0^2 f(x)dx=\mathrm{E}_2}{=}$$

$$\int_{\alpha}^{0}f(x)dx+\mathrm{E}_2+\int_{0}^{\beta}f(x)dx$$

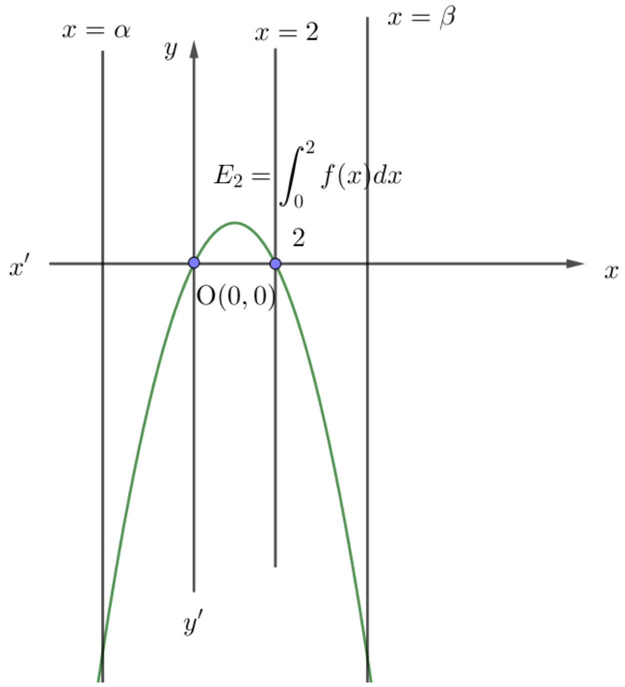
$\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ f(x)<0\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in[\alpha,0)\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega\int_{2}^{\beta}f(x)dx<0$

$\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ f(x)<0\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in(2,\beta]\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega\int_{2}^{\beta}f(x)dx<0$

$$\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_{\alpha}^{0}f(x)dx<0\\ \displaystyle\int_{2}^{\beta}f(x)dx<0\end{array}\right\}\Rightarrow\int_{\alpha}^{0}f(x)dx+\int_{2}^{\beta}f(x)dx<0\Rightarrow\int_{\alpha}^{0}f(x)dx+\mathrm{E}_2+\int_{2}^{\beta}f(x)dx<0$$

$$\Rightarrow\mathrm{I}(\alpha,\beta)<\mathrm{E}_2$$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \mathrm{I}_{\max}=\mathrm{E}_2=\dfrac{4}{3}\tau.\mu$



66.

$\Delta i\nu\varepsilon\tau\alpha\iota\ \eta\ f:[\alpha,\beta]\to[0,+\infty)\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \kappa\alpha\iota\ \kappa\upsilon\rho\tau\acute{\eta}.$ Να δείξετε ότι για $\alpha \le x < y \le \beta$ ισχύει:

$$\frac{1}{y-x}\int_x^y f^2(t)dt \le \frac{1}{3}\left(f^2(x)+f^2(y)+f(x)f(y)\right)$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $[\alpha,\beta]$ θα ισχύει:

$$\begin{Bmatrix} (\mathrm{I})\ \text{Η } f \text{ είναι συνεχής στο } [\alpha,\beta] \\ (\mathrm{II})\ f' \underset{\wedge}{\uparrow} (\alpha,\beta) \end{Bmatrix}$$

Αν $\alpha \le x < t < y \le \beta$

$$\begin{Bmatrix} (\mathrm{I})\ \text{Η } f \text{ είναι συνεχής στα διαστήματα } [x,t],[t,\beta] \\ (\mathrm{II})\ \text{Η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα } (\alpha,t),(t,\beta) \end{Bmatrix}$$

Οπότε η f ικανοποιεί τις προυποθέσεις του Θ.Μ.Τ στα διαστήματα $[x,t],[t,y]$. Συνεπώς θα υπάρχουν $\xi_1 \in (x,t)$ και $\xi_2 \in (t,y)$ τέτοια ώστε να ισχύουν:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(t)-f(x)}{t-x} \ , \ f'(\xi_2) = \frac{f(y)-f(t)}{y-t}$$

$$\alpha \le x < \xi_1 < t < \xi_2 < y \le \beta \Rightarrow \alpha < \xi_1 < \xi_2 < \beta \overset{f' \underset{\wedge}{\uparrow} (\alpha,\beta)}{\Longrightarrow} f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$$

$$\frac{f(t)-f(x)}{t-x} < \frac{f(y)-f(t)}{y-t} \Rightarrow \left(\begin{matrix} \begin{Bmatrix} t > x \\ y > t \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} t-x > 0 \\ y-t > 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \\ (t-x)(y-t) > 0 \end{matrix} \right)$$

$$\frac{f(t)-f(x)}{\cancel{t-x}} \cancel{(t-x)} (y-t) < \frac{f(y)-f(t)}{\cancel{y-t}} \cancel{(y-t)} (t-x) \Rightarrow$$

$$f(t)y \cancel{-tf(t)} - yf(x) + tf(x) < f(y)t - xf(y) \cancel{-f(t)t} + xf(t)$$

$$\Rightarrow f(t)(y-x) < f(y)(t-x) + f(x)(y-t) \overset{y>x \Rightarrow y-x>0}{\Longrightarrow}$$

$$\frac{f(t)(y-x)}{y-x} < \frac{f(y)(t-x)+f(x)(y-t)}{y-x} \Rightarrow$$

$$f(t) < \frac{f(y)(t-x)+f(x)(y-t)}{y-x} \Rightarrow$$

$$f(t) < \frac{f(y)}{y-x}(t-x) + \frac{f(x)}{y-x}(y-t)$$

$$f(t) < \frac{f(y)}{y-x}(t-x) + \frac{f(x)}{y-x}(y-t) \Rightarrow$$

$$\left[\left\{ \begin{matrix} f(t), f(y), f(x) \geq 0 \\ t-x, y-x, y-t > 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} f(t) \geq 0 \\ \dfrac{f(y)}{y-x}(t-x) + \dfrac{f(x)}{y-x}(y-t) \geq 0 \end{matrix} \right\} \right]$$

$$f^2(t) < \left[\frac{f(y)}{y-x}(t-x) + \frac{f(x)}{y-x}(y-t) \right]^2 \Rightarrow$$

$$f^2(t) < \frac{f^2(y)}{(y-x)^2}(t-x)^2 + 2\frac{f(y)f(x)}{(y-x)^2}(t-x)(y-t) +$$

$$\frac{f(x)^2}{(y-x)^2}(y-t)^2 \Rightarrow$$

$$\int_x^y f^2(t)dt < \frac{f^2(y)}{(y-x)^2}\int_x^y (t-x)^2\,dt + 2\frac{f(y)f(x)}{(y-x)^2}\int_x^y (t-x)(y-t)\,dt +$$

$$\frac{f^2(x)}{(y-x)^2}\int_x^y (y-t)^2 dt \,(1)$$

$$\int_x^y (t-x)^2 dt = \int_x^y (t-x)^2 (t-x)'\,dt = \left[\frac{(t-x)^3}{3} \right]_x^y = \frac{(y-x)^3}{3}$$

$$\int_x^y (t-x)(y-t)\,dt = -\int_x^y (t-x)(t-y)\,dt \overset{(x-\alpha)(x-b)=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta}{=}$$

$$-\int_x^y \left[t^2 - (x+y)t + xy \right] dt = -\left[\frac{t^3}{3} - (x+y)\frac{t^2}{2} + xyt \right]_x^y =$$

$$-\frac{y^3}{3} + (x+y)\frac{y^2}{2} - xy^2 + \frac{x^3}{3} - (x+y)\frac{x^2}{2} + x^2y =$$

$$-\frac{y^3-x^3}{3} + (x+y)\frac{y^2-x^2}{2} - xy(y-x) =$$

$$-\frac{(y-x)\left(y^2+yx+x^2\right)}{3}+(x+y)\frac{(y-x)(x+y)}{2}-xy(y-x)=$$

$$(y-x)\left[-\frac{\left(y^2+yx+x^2\right)}{3}+\frac{(x+y)^2}{2}-xy\right]=$$

$$(y-x)\frac{-2y^2-2yx-2x^2+3x^2+6xy+3y^2-6xy}{6}=$$

$$(y-x)\frac{-2y^2-2yx-2x^2+3x^2+6xy+3y^2-6xy}{6}=$$

$$(y-x)\frac{x^2-2xy+y^2}{6}=(y-x)\frac{(y-x)^2}{6}=\frac{(y-x)^3}{6}$$

$$\int_x^y (y-t)^2 dt=-\int_x^y (y-t)^2 (y-t)' dt=-\left[\frac{(y-t)^3}{3}\right]_x^y=\frac{(y-x)^3}{3}$$

$$\frac{f^2(y)}{(y-x)^2}\int_x^y (t-x)^2\,dt+2\frac{f(y)f(x)}{(y-x)^2}\int_x^y (t-x)(y-t)\,dt+$$

$$\frac{f^2(x)}{(y-x)^2}\int_x^y (y-t)^2 dt=\frac{f^2(y)}{(y-x)^2}\frac{(y-x)^3}{3}+2\frac{f(y)f(x)}{(y-x)^2}\frac{(y-x)^3}{6}+$$

$$\frac{f^2(x)}{(y-x)^2}\frac{(y-x)^3}{3}=(y-x)\frac{f^2(y)+f(x)f(y)+f^2(x)}{3}$$

Τότε απο την σχέση (1) θα έχω:

$$\int_x^y f^2(t)dt<(y-x)\frac{f^2(y)+f(x)f(y)+f^2(x)}{3}\overset{y-x>0}{\Longrightarrow}$$

$$\frac{1}{y-x}\int_x^y f^2(t)dt<\frac{1}{y-x}(y-x)\frac{f^2(y)+f(x)f(y)+f^2(x)}{3}$$

$$\frac{1}{y-x}\int_x^y f^2(t)dt<\frac{f^2(y)+f(x)f(y)+f^2(x)}{3}$$

67.

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1 + \varepsilon\varphi^3 x}$$

$$\text{Επειδή } \frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2} \text{ θεωρώ το μετασχηματισμό}: x=\frac{\pi}{2}-t$$

$$x=\frac{\pi}{2}-t \Leftrightarrow t=\frac{\pi}{2}-x$$

$$x=\frac{\pi}{6}: t=\frac{\pi}{2}-x=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$$

$$x=\frac{\pi}{3}: t=\frac{\pi}{2}-x=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$$

$$dx=\left(\frac{\pi}{2}-t\right)' dt=-dt$$

$$I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{1+\varepsilon\varphi^3 x}=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{-dt}{1+\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}-t\right)^3}\overset{\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\sigma\varphi t}{=}-\left(-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dt}{1+\left(\frac{1}{\varepsilon\varphi t}\right)^3}\right)\overset{\substack{\sigma\varphi t=\frac{1}{\varepsilon\varphi t}\\ t\neq\kappa\pi,\, t\neq\lambda\pi+\frac{\pi}{2}\\ \kappa,\lambda\in\mathbb{Z}}}{=}$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dt}{1+\frac{1}{\varepsilon\varphi^3 t}}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dt}{\frac{\varepsilon\varphi^3 t}{\varepsilon\varphi^3 t}+\frac{1}{\varepsilon\varphi^3 t}}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\varepsilon\varphi^3 t\,dt}{\varepsilon\varphi^3 t+1}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\left(\varepsilon\varphi^3 t+1\right)-1}{\varepsilon\varphi^3 t+1}dt=$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\varepsilon\varphi^3 t+1}{\varepsilon\varphi^3 t+1}dt-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dt}{\varepsilon\varphi^3 t+1}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}dt-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dt}{\varepsilon\varphi^3 t+1}=\left[t\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\varepsilon\varphi^3 x+1}=$$

$$\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}-I=\frac{2\pi}{6}-\frac{\pi}{6}-I=\frac{\pi}{6}-I$$

$$\text{Έχω}: I=\frac{\pi}{6}-I \Leftrightarrow 2I=\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow I=\frac{\frac{\pi}{6}}{2} \Leftrightarrow I=\frac{\pi}{12}$$

68.

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x^3+ax$, όπου α είναι ένας σταθερός αριθμός.

Αν οι αριθμοί $\int_0^1 f(x)dx$, $\int_1^2 f(x)dx$ είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2-6x-3.9375=0$ να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha=1$

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left|f(x)\right|+x^2\eta\mu x\right)=+\infty$

γ) Η συνάρτηση $g(x)=\left|f(x)\right|+x^2\eta\mu x$ δεν είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$

$\text{Επειδή} \int_0^1 f(x)dx \ , \int_1^2 f(x)dx$ *λύσεις της δευτεροβάθμιας εξίσωσης*

θα έχω:

$$\int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx = -\frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx = -\frac{-6}{1} \Leftrightarrow \int_0^2 \left(x^3 + ax\right)dx = 6$$

$$\left[\frac{x^4}{4} + \frac{ax^2}{2}\right]_0^2 = 6 \Leftrightarrow \frac{16}{4} + \frac{4a}{2} = 6 \Leftrightarrow 4 + 2\alpha = 6 \Leftrightarrow 2\alpha = 2 \Leftrightarrow \alpha = 1$$

Ο*πότε* : $f(x) = x^3 + x$

$$x > 0 \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x^3 > 0 \\ x > 0 \\ x^2 > 0 \\ \eta\mu x \geq -1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x^3 + x > 0 \\ x^2 \eta\mu x \geq -x^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \left|x^3 + x\right| = x^3 + x \\ x^2 \eta\mu x \geq -x^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{matrix} \left|f(x)\right| = x^3 + x \\ x^2 \eta\mu x \geq -x^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left|f(x)\right| + x^2 \eta\mu x \geq x^3 - x^2 + x$$

$$\left\{\begin{matrix} (\text{I}) \left|f(x)\right| + x^2 \eta\mu x \geq x^3 - x^2 + x, x \in (0, +\infty) \\ (\text{II}) \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^3 - x^2 + x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty \end{matrix}\right\}$$

Ο*πότε* : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\left|f(x)\right| + x^2 \eta\mu x\right) = +\infty$

Έστω η συνάρτηση $g(x) = \left|f(x)\right| + x^2 \eta\mu x$ *είναι γνησίως φθίνουσα*

$$x > 0 \overset{g \downarrow \mathbb{R}}{\Longrightarrow} g(x) < g(0) \Rightarrow g(x) < 0 \left(\text{Άτοπο γιατί } \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\left|f(x)\right|+x^2\eta\mu x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\left|x^3+x\right|+x^2\eta\mu x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(|x|^3\left|1+\frac{1}{x}\right|+x^2\eta\mu x\right)$$

$$\overset{x^2=|x|^2}{=}\lim_{x\to-\infty}\left(|x|^3\left|1+\frac{1}{x}\right|+|x|^2\eta\mu x\right)=\lim_{x\to-\infty}|x|^3\left(\left|1+\frac{1}{x}\right|+\frac{|x|^2}{|x|^3}\eta\mu x\right)=$$

$$\lim_{x\to-\infty}|x|^3\left(\left|1+\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\right|+\lim_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu x}{|x|^3}\right)=(+\infty)\left(|1+0|+0\right)=+\infty$$

$A\nu\ x\neq 0\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\left|\frac{\eta\mu x}{|x|^3}\right|=\frac{|\eta\mu x|}{|x|^3}\leq\frac{1}{|x|^3}\Rightarrow\left|\frac{\eta\mu x}{|x|^3}\right|\leq\frac{1}{|x|^3}\Rightarrow-\frac{1}{|x|^3}\leq\frac{\eta\mu x}{|x|^3}\leq\frac{1}{|x|^3}$$

$$\acute{E}\chi\omega:\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})-\dfrac{1}{|x|^3}\leq\dfrac{\eta\mu x}{|x|^3}\leq\dfrac{1}{|x|^3},\ x\neq 0\\ (\mathrm{II})\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{1}{|x|^3}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{|x|^3}=0\end{array}\right\}$$

$A\pi o\ \kappa\rho\iota\tau\acute{\eta}\rho\iota o\ \pi\alpha\rho\varepsilon\mu\beta o\lambda\acute{\eta}\varsigma\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\eta\mu x}{|x|^3}=0$

$\acute{E}\sigma\tau\omega\ \eta\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ g(x)=\left|f(x)\right|+x^2\eta\mu x\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \gamma\nu\eta\sigma\acute{\iota}\omega\varsigma\ \alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha$

$$x<0\xRightarrow{g\uparrow\mathbb{R}}g(x)<g(0)\Rightarrow g(x)<0\left(\acute{A}\tau o\pi o\ \gamma\iota\alpha\tau\acute{\iota}\ \lim_{x\to-\infty}g(x)=+\infty\right)$$

$\Sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\acute{\omega}\varsigma\ \eta\ g\ \delta\varepsilon\nu\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \gamma\nu\eta\sigma\acute{\iota}\omega\varsigma\ \mu o\nu\acute{o}\tau o\nu\eta$

69.

Δίνεται η συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$2f(x)\geq f(1)+f(2)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $f(1)=f(2)$

β) Υπάρχει $x_0\in(1,2): f''(x_0)=0$

γ) Η εξίσωση $f''(x)=f'(x)$ έχει τουλάχιστον 2 ρίζες στο $(1,2)$

$\text{Αν } x = 1 \ \theta\alpha \ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$2f(1) \ge f(1) + f(2) \Leftrightarrow f(1) \ge f(2)$

$\text{Αν } x = 2 \ \theta\alpha \ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$2f(2) \ge f(1) + f(2) \Leftrightarrow f(2) \ge f(1)$

$$\text{Οπότε}: \begin{Bmatrix} f(1) \ge f(2) \\ f(2) \ge f(1) \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} f(2) \le f(1) \\ f(1) \le f(2) \end{Bmatrix} \Rightarrow f(1) \le f(2) \le f(1) \Rightarrow$$

$f(2) = f(1)$

$$2f(x) \ge f(1) + f(2) \overset{f(2)=f(1)}{\Longleftrightarrow} 2f(x) \ge f(1) + f(1) \Leftrightarrow 2f(x) \ge 2f(1) \Leftrightarrow$$

$f(x) \ge f(1)$

Οπότε η συνάρτηση έχει ελάχιστη τιμή στην θέση $x_1 = 0$

$$\begin{Bmatrix} (\text{I}) \ \text{Το σημείο } x_1 = 0 \text{ είναι εσωτερικό σημείο του} \\ \text{διαστήματος } (-\infty, +\infty) \\ (\text{II}) \ \text{Το σημείο } x_1 = 0 \text{ είναι θέση ακρότατου} \\ (\text{III}) \ \text{Η συνάρτηση } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στη θέση } x_1 = 0 \end{Bmatrix}$$

Συνεπώς η συνάρτηση f *ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος του Fermat στην θέση* $x_1 = 0$. *Οπότε απο το θεώρημα του Fermat θα έχω* $f'(1) = 0$

$$2f(x) \ge f(1) + f(2) \overset{f(1)=f(2)}{\Longleftrightarrow} 2f(x) \ge f(2) + f(2) \Leftrightarrow 2f(x) \ge 2f(2) \Leftrightarrow$$

$f(x) \ge f(2)$

Οπότε η συνάρτηση έχει ελάχιστη τιμή στην θέση $x_2 = 2$

$$\begin{Bmatrix} (\text{I}) \ \text{Το σημείο } x_2 = 2 \text{ είναι εσωτερικό σημείο του} \\ \text{διαστήματος } (-\infty, +\infty) \\ (\text{II}) \ \text{Το σημείο } x_2 = 2 \text{ είναι θέση ακρότατου} \\ (\text{III}) \ \text{Η συνάρτηση } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στη θέση } x_2 = 2 \end{Bmatrix}$$

Συνεπώς η συνάρτηση f *ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος του Fermat στην θέση* $x_2 = 2$. *Οπότε απο το θεώρημα του Fermat θα έχω* $f'(2) = 0$

$$\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\,\text{Η}\ \textit{συνάρτηση}\ f'\ \textit{είναι συνεχής στο κλειστό} \\ \textit{διάστημα}\ [1,2] \\ (\mathrm{II})\,\text{Η}\ \textit{συνάρτηση}\ f'\ \textit{είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό} \\ \textit{διάστημα}\ (1,2) \\ (\mathrm{III})\ f'(1)=f'(2)\end{array}\right\}$$

Οπότε η συνάρτηση f' ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο κλειστό διάστημα $[1,2]$. Οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1,2)$ με $f''(x_0)=0$

$$\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\,\text{Η}\ \textit{συνάρτηση}\ f\ \textit{είναι συνεχής στο κλειστό} \\ \textit{διαστημα}\ [1,2] \\ (\mathrm{II})\,\text{Η}\ \textit{συνάρτηση}\ f\ \textit{είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό} \\ \textit{διαστήματα}\,(1,2) \\ (\mathrm{III})\ f(1)=f(2)\end{array}\right\}$$

Οπότε η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο κλειστο διαστήματα $[1,2]$. Οπότε υπάρχει $x_1 \in (1,2)$ με $f'(x_1)=0$

Θεωρώ την συνάρτηση $g(x)=e^{-x}f'(x), x\in\mathbb{R}$

$$f'(1)=f'(2)=f'(x_1)=0 \Rightarrow g(1)=g(2)=g(x_1)=0$$

$$g'(x)=-e^{-x}f'(x)+e^{-x}f''(x)=e^{-x}\left[f''(x)-f'(x)\right]$$

$$\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\,\mathrm{H}\ \textit{συνάρτηση } g \textit{ είναι συνεχής στα κλειστά} \\ \textit{διαστήματα } [1,x_1],[x_1,2] \\ (\mathrm{II})\,\mathrm{H}\ \textit{συνάρτηση } g \textit{ είναι παραγωγίσιμη στα ανοικτά} \\ \textit{διαστήματα } (1,x_1),(x_1,2) \\ (\mathrm{III})\ g(1)=g(2)=g(x_1)\end{array}\right\}$$

Οπότε η συνάρτηση g ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στα κλειστά διαστήματα $[1,x_1],[x_1,2]$. Οπότε υπάρχουν $\xi_1\in(1,x_1),\xi_2\in(x_1,2)$ με $g'(\xi_1)=g'(\xi_2)=0$

$$\left\{\begin{array}{l}g'(\xi_1)=0 \\ g'(\xi_2)=0 \\ 1<\xi_1<x_1<\xi_2<2\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}e^{-\xi_1}\left[f''(\xi_1)-f'(\xi_1)\right]=0 \\ e^{-\xi_2}\left[f''(\xi_2)-f'(\xi_2)\right]=0 \\ 1<\xi_1<\xi_2<2\end{array}\right\}\overset{e^{-\xi_1},e^{-\xi_2}\neq 0}{\Longrightarrow}$$

$$\left\{\begin{array}{l}f''(\xi_1)-f'(\xi_1)=0 \\ f''(\xi_2)-f'(\xi_2)=0 \\ 1<\xi_1<\xi_2<2\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}f''(\xi_1)=f'(\xi_1) \\ f''(\xi_2)=f'(\xi_2) \\ 1<\xi_1<\xi_2<2\end{array}\right\}$$

Οπότε η εξίσωση $f''(x)=f'(x)$ έχει τουλάχιστον 2 ρίζες στο $(1,2)$

70.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

$$x>0 \Rightarrow \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\ln\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}} = e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{x}\right)} = e^{\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{x}} = e^{\frac{\ln 1 - \ln x}{x}} = e^{\frac{-\ln x}{x}} = e^{-\frac{\ln x}{x}}$$

$$\boxed{e^{\ln\theta} = \theta, \theta>0}\ , \boxed{\ln\theta^{\kappa} = \kappa\ln\theta, \theta>0}\ , \boxed{\ln\frac{\theta_1}{\theta_2} = \ln\theta_1 - \ln\theta_2, \theta_1, \theta_2 > 0}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\begin{pmatrix} \lim\limits_{x\to+\infty}\ln x = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ D.L.H \end{pmatrix} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{\ln x}{x}} = e^{-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}} = e^{0} = 1$$

71.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\left(e^{x}\right)}{x}}$$

$$\left|\frac{\sin\left(e^{x}\right)}{x}\right| = \frac{\left|\sin\left(e^{x}\right)\right|}{|x|} \le \frac{1}{|x|} \Rightarrow \left|\frac{\sin\left(e^{x}\right)}{x}\right| \le \frac{1}{|x|} \Rightarrow -\frac{1}{|x|} \le \frac{\sin\left(e^{x}\right)}{x} \le \frac{1}{|x|}$$

$\boxed{|\sin x| \le 1}$ $\boxed{|x| \le \theta \Leftrightarrow -\theta \le x \le \theta, \theta \ge 0}$

$$\left.\begin{cases} (\mathrm{I}) -\dfrac{1}{|x|} \le \dfrac{\sin\left(e^{x}\right)}{x} \le \dfrac{1}{|x|}, x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \\ (\mathrm{II}) \lim\limits_{x \to +\infty}\left(-\dfrac{1}{|x|}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty}\dfrac{1}{|x|} = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty}\frac{\sin\left(e^{x}\right)}{x} = 0$$

72.

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$|f(x) - \eta\mu x| \le \sqrt{1 + x^2} - 1$ *για κάθε* $x \in \mathbb{R}$

(I) Ν*α αποδειχτεί ότι η f είναι συνεχής στο* $x_0 = 0$

(II) Ν*α βρεθούν τα όρια* $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{f(x)}{x}, \lim\limits_{x \to 0}\dfrac{3xf(x) - \eta\mu^2 x}{x^2 + \eta\mu^2 x}$

$$(\mathrm{I})\left|f(x)-\eta\mu x\right|\le\sqrt{1+x^2}-1\Leftrightarrow-\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\le f(x)-\eta\mu x\le\sqrt{1+x^2}-1$$

$$\Leftrightarrow-\sqrt{1+x^2}+1\le f(x)-\eta\mu x\le\sqrt{1+x^2}-1\Leftrightarrow$$

$$-\sqrt{1+x^2}+1+\eta\mu x\le f(x)\le\sqrt{1+x^2}-1+\eta\mu x(1)$$

$\Theta\acute{\varepsilon}\tau\omega\ x=0\ \sigma\tau\eta\nu\ \sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\eta\ (1):$

$$-\sqrt{1+0^2}+1+\eta\mu 0\le f(0)\le\sqrt{1+0^2}-1+\eta\mu 0\Leftrightarrow 0\le f(0)\le 0\Leftrightarrow f(0)=0$$

$$\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})-\sqrt{1+x^2}+1+\eta\mu x\le f(x)\le\sqrt{1+x^2}-1+\eta\mu x\\(\mathrm{II})\lim\limits_{x\to 0}\left(-\sqrt{1+x^2}+1+\eta\mu x\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{1+x^2}-1+\eta\mu x\right)=0\end{array}\right\}$$

Οπότε απο το κριτήριο παρεμβολής θα έχω $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0=f(0)$

Συνεπώς η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0=0$

Αν $x\ne 0$ θα έχω:

$$-\sqrt{1+x^2}+1+\eta\mu x\le f(x)\le\sqrt{1+x^2}-1+\eta\mu x\Leftrightarrow$$

$$-\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)+\eta\mu x\le f(x)\le\sqrt{1+x^2}-1+\eta\mu x\Leftrightarrow$$

$$-\frac{\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}{\sqrt{1+x^2}+1}+\eta\mu x\le f(x)\le\frac{\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}{\sqrt{1+x^2}+1}+\eta\mu x$$

$$-\frac{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2-1}{\sqrt{1+x^2}+1}+\eta\mu x\le f(x)\le\frac{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2-1}{\sqrt{1+x^2}+1}+\eta\mu x\Leftrightarrow$$

$$-\frac{1+x^2-1}{\sqrt{1+x^2}+1}+\eta\mu x\le f\left(x\right)\le\frac{1+x^2-1}{\sqrt{1+x^2}+1}+\eta\mu x$$

$$-\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}+1}+\eta\mu x\le f\left(x\right)\le\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}+1}+\eta\mu x$$

$$x\left(-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}+\frac{\eta\mu x}{x}\right)\le f\left(x\right)\le x\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}+\frac{\eta\mu x}{x}\right)$$

$\text{Α}\nu\ x>0\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\frac{x\left(-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}+\frac{\eta\mu x}{x}\right)}{x}\le\frac{f\left(x\right)}{x}\le\frac{x\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}+\frac{\eta\mu x}{x}\right)}{x}\Leftrightarrow$$

$$-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}+\frac{\eta\mu x}{x}\le\frac{f\left(x\right)}{x}\le\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}+\frac{\eta\mu x}{x}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\left(\text{I}\right)-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}+\frac{\eta\mu x}{x}\le\frac{f\left(x\right)}{x}\le\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}+\frac{\eta\mu x}{x},x\in\left(0,+\infty\right)\\ \left(\text{II}\right)\lim\limits_{x\to0^+}\left(-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}+\frac{\eta\mu x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}+\frac{\eta\mu x}{x}\right)=1\end{array}\right\}$$

$\text{Ο}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \alpha\pi o\ \tau o\ \kappa\rho\iota\tau\acute{\eta}\rho\iota o\ \pi\alpha\rho\varepsilon\mu\beta o\lambda\acute{\eta}\varsigma\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega\ \lim\limits_{x\to0^+}\frac{f\left(x\right)}{x}=1\left(2\right)$

$\text{Α}\nu\ x<0\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\frac{x\left(-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}+\frac{\eta\mu x}{x}\right)}{x}\ge\frac{f\left(x\right)}{x}\ge\frac{x\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}+\frac{\eta\mu x}{x}\right)}{x}\Leftrightarrow$$

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}+\frac{\eta\mu x}{x}\le\frac{f\left(x\right)}{x}\le-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}+\frac{\eta\mu x}{x}$$

$$\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}+\dfrac{\eta\mu x}{x}\le\dfrac{f(x)}{x}\le-\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}+\dfrac{\eta\mu x}{x},x\in(-\infty,0)\\ (\mathrm{II})\lim\limits_{x\to0^-}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}+\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(-\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}+\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)=1\end{array}\right\}$$

Οπότε απο το κριτήριο παρεμβολής θα έχω $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)}{x}=1(3)$

Απο τις σχέσεις $(2),(3)$ έχω $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$

$$\lim_{x\to0}\frac{3xf(x)-\eta\mu^2x}{x^2+\eta\mu^2x}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{3xf(x)-\eta\mu^2x}{x^2}}{\dfrac{x^2+\eta\mu^2x}{x^2}}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{3xf(x)}{x^2}-\dfrac{\eta\mu^2x}{x^2}}{\dfrac{x^2}{x^2}+\dfrac{\eta\mu^2x}{x^2}}=$$

$$\lim_{x\to0}\frac{3\dfrac{f(x)}{x}-\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^2}{1+\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^2}=\frac{3\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}-\left(\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^2}{1+\left(\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^2}=\frac{3\bullet1-1^2}{1+1^2}=\frac{2}{2}=1$$

73.

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι

$f^5(x)+x^4f^3(x)=1(1)$

Να αποδείξετε ότι

(α) Υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$, ώστε $f(x_0)$ ολικό μέγιστο

(β) Η συνάρτηση f δεν έχει ολικό ελάχιστο

(γ) Η συνάρτηση f δεν αντιστρέφεται

(δ) Ο $y'y$ είναι άξονας συμμετρίας της C_f

(ε) Να υπολογίσετε αν υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}$

$\left(\alpha\right)$ $\underline{\Theta\alpha\ \alpha\pi o\delta\varepsilon\acute{\iota}\xi\omega\ \acute{o}\tau\iota\ f\left(x\right)>0}$

Αν $x=0$ απο την σχέση (1) θα έχω:

$f^{5}\left(0\right)+0^{4}\bullet f^{3}\left(0\right)=1\Leftrightarrow f^{5}\left(0\right)=1\Leftrightarrow f\left(0\right)=1$

Έστω $x\neq 0$

$f^{5}\left(x\right)+x^{4}f^{3}\left(x\right)=1\Leftrightarrow f^{3}\left(x\right)\left[f^{2}\left(x\right)+x^{4}\right]=1$

$$\left.\begin{cases}x\neq 0\\ f^{2}\left(x\right)\end{cases}\right\}\Rightarrow\left.\begin{cases}x^{4}>0\\ f^{2}\left(x\right)\end{cases}\right\}\Rightarrow x^{4}+f^{2}\left(x\right)>0\Rightarrow x^{4}+f^{2}\left(x\right)\neq 0$$

$$f^{3}\left(x\right)\left[f^{2}\left(x\right)+x^{4}\right]=1\overset{x^{4}+f^{2}(x)\neq 0}{\Longleftrightarrow}f^{3}\left(x\right)\left[f^{2}\left(x\right)+x^{4}\right]=1\Leftrightarrow f^{3}\left(x\right)=\frac{1}{f^{2}\left(x\right)+x^{4}}$$

$$x^{4}+f^{2}\left(x\right)>0\Rightarrow\frac{1}{x^{4}+f^{2}\left(x\right)}>0\Rightarrow f^{3}\left(x\right)>0\Rightarrow f\left(x\right)>0$$

Αν $x\neq 0$ θα έχω: $f^{3}\left(x\right)=\dfrac{1}{f^{2}\left(x\right)+x^{4}}$

$$x\neq 0\Rightarrow x^{4}>0\Rightarrow f^{2}\left(x\right)+x^{4}>f^{2}\left(x\right)\Rightarrow\frac{1}{f^{2}\left(x\right)+x^{4}}<\frac{1}{f^{2}\left(x\right)}\overset{f^{3}(x)=\frac{1}{f^{2}(x)+x^{4}}}{\Longrightarrow}$$

$$f^{3}\left(x\right)<\frac{1}{f^{2}\left(x\right)}\overset{f^{2}(x)>0}{\Longrightarrow}f^{3}\left(x\right)f^{2}\left(x\right)<\frac{1}{f^{2}\left(x\right)}\Rightarrow f^{5}\left(x\right)<1\Rightarrow f\left(x\right)<1$$

Αν $x\neq 0$ έχω $f\left(x\right)<1$

Αν $x=0$ έχω $f\left(0\right)=1$

Οπότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f\left(x\right)\leq 1=f\left(0\right)$

Συνεπώς η συνάρτηση f έχει ολικό μέγιστο στην θέση $x_{0}=0$ τον αριθμό $f\left(x_{0}\right)=f\left(0\right)=1$

(β) *Έστω η συνάρτηση* f *έχει ολικό ελάχιστο στην θέση* x_1 *τον αριθμό* $f(x_1)$. Τ*ότε θα έχω* $f(x) \geq f(x_1)$ *για κάθε* $x \in \mathbb{R}$

Α*ν* $x \neq 0$ *θα έχω*:

$$f(x) \geq f(x_1) \Rightarrow \begin{Bmatrix} f^3(x) \geq f^3(x_1) \\ f^5(x) \geq f^5(x_1) \end{Bmatrix} \overset{x\neq 0 \Rightarrow x^4>0}{\Longrightarrow} \begin{Bmatrix} f^3(x)x^4 \geq x^4 f^3(x_1) \\ f^5(x) \geq f^5(x_1) \end{Bmatrix} \overset{(+)}{\Longrightarrow}$$

$$f^5(x) + f^3(x)x^4 \geq f^5(x_1) + x^4 f^3(x_1) \overset{f^5(x)+f^3(x)x^4=1}{\Longrightarrow} 1 \geq f^5(x_1) + x^4 f^3(x_1)$$

$$\Rightarrow f^5(x_1) + x^4 f^3(x_1) \leq 1 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left[f^5(x_1) + x^4 f^3(x_1)\right] \leq \lim_{x\to+\infty} 1 \Rightarrow$$

$+\infty \leq 1$ (ΑΤΟΠΟ)

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f^5(x_1) + x^4 f^3(x_1)\right] = f^5(x_1) + \lim_{x\to+\infty} x^4 f^3(x_1) \overset{f(x_1)>0}{=} +\infty$$

(γ) <u>Θ*α αποδείξω ότι* $f(1) = f(-1)$</u>

$$\begin{Bmatrix} f^5(1) + 1^4 f^3(1) = 1 \\ f^5(-1) + (-1)^4 f^3(-1) = 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} f^5(1) + f^3(1) = 1 \\ f^5(-1) + f^3(-1) = 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$f^5(1) + f^3(1) = f^5(-1) + f^3(-1)$$

Έστω: $f(1) < f(-1) \Rightarrow \begin{Bmatrix} f^5(1) < f^5(-1) \\ f^3(1) < f^3(-1) \end{Bmatrix} \overset{(+)}{\Longrightarrow}$

$f^5(1) + f^3(1) < f^5(-1) + f^3(-1)$ (ΑΤΟΠΟ)

Έστω: $f(1) > f(-1) \Rightarrow \begin{Bmatrix} f^5(1) > f^5(-1) \\ f^3(1) > f^3(-1) \end{Bmatrix} \overset{(+)}{\Longrightarrow}$

$f^5(1) + f^3(1) > f^5(-1) + f^3(-1)$ (ΑΤΟΠΟ)

Ο*πότε* $f(1) = f(-1)$. Σ*υνεπώς η* f *δεν είναι* "1−1". *Άρα η* f *δεν αντιστρέφεται*

$(\delta)\underline{\Theta\alpha\ \alpha\pi o\delta\varepsilon\acute{\iota}\xi\omega\ \acute{o}\tau\iota\ f(x)=f(-x)}$

$$\left.\begin{cases} f^5(x)+x^4f^3(x)=1 \\ f^5(-x)+(-x)^4\,f^3(-x)=1 \end{cases}\right\}\Rightarrow\left.\begin{cases} f^5(x)+x^4f^3(x)=1 \\ f^5(-1)+x^4f^3(-x)=1 \end{cases}\right\}\Rightarrow$$

$$f^5(x)+x^4f^3(-x)=f^5(-x)+x^4f^3(-x)$$

$\mathrm{A}\nu\ x=0\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\left.\begin{cases} f(-x)=f(0)=1 \\ f(x)=f(0)=1 \end{cases}\right\}\Rightarrow f(-x)=f(x)$$

$\mathrm{A}\nu\ x\neq 0\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\acute{E}\sigma\tau\omega: f(x)<f(-x)\Rightarrow\left.\begin{cases} f^5(x)<f^5(-x) \\ f^3(x)<f^3(-x) \end{cases}\right\}\overset{x\neq 0\Rightarrow x^2>0}{\Longrightarrow}\left.\begin{cases} f^5(x)<f^5(-x) \\ x^2f^3(x)<x^2f^3(-x) \end{cases}\right\}$$

$$\overset{(+)}{\Longrightarrow}f^5(x)+x^4f^3(-x)<f^5(-x)+x^4f^3(-x)\,(\mathrm{ATO\Pi O})$$

$$\acute{E}\sigma\tau\omega: f(x)>f(-x)\Rightarrow\left.\begin{cases} f^5(x)>f^5(-x) \\ f^3(x)>f^3(-x) \end{cases}\right\}\overset{x\neq 0\Rightarrow x^2>0}{\Longrightarrow}\left.\begin{cases} f^5(x)>f^5(-x) \\ x^2f^3(x)>x^2f^3(-x) \end{cases}\right\}$$

$$\overset{(+)}{\Longrightarrow}f^5(x)+x^4f^3(-x)>f^5(-x)+x^4f^3(-x)\,(\mathrm{ATO\Pi O})$$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ f(x)=f(-x).\,\Sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\acute{\omega}\varsigma\ o\ y'y\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \acute{\alpha}\xi o\nu\alpha\varsigma\ \sigma\upsilon\mu\mu\varepsilon\tau\rho\acute{\iota}\alpha\varsigma\ \tau\eta\varsigma\ C_f$

(ε) Αν $x>0$ θα έχω:

$$f^3(x)=\frac{1}{f^2(x)+x^4}$$

$$f(x)>0\Rightarrow f^2(x)>0\Rightarrow f^2(x)+x^4>x^4\Rightarrow \frac{1}{f^2(x)+x^4}<\frac{1}{x^4}\Rightarrow$$

$$f^3(x)<\frac{1}{x^4}\overset{x>0\Rightarrow x^3>0}{\Longrightarrow}\frac{f^3(x)}{x^3}<\frac{\frac{1}{x^4}}{x^3}\Rightarrow\left(\frac{f(x)}{x}\right)^3<\frac{\frac{1}{x^4}}{x^3}\Rightarrow\left(\frac{f(x)}{x}\right)^3<\frac{1}{x^{12}}$$

Επειδή $x>0$ έχω: $\frac{f(x)}{x}>0\Rightarrow\left(\frac{f(x)}{x}\right)^3>0$

$$\text{Έχω}:\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\, 0<\left(\frac{f(x)}{x}\right)^3<\frac{1}{x^{12}},\, x>0\\ (\mathrm{II})\lim\limits_{x\to+\infty}0=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{12}}=0\end{array}\right\}$$

Οπότε απο το κριτήριο παρεμβολής θα έχω: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)^3=0$

Επειδή $x>0$ έχω $\frac{f(x)}{x}>0$. Οπότε θα ισχύει $\frac{f(x)}{x}=\sqrt[3]{\left(\frac{f(x)}{x}\right)^3}$

Άρα: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\sqrt[3]{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)^3}=\sqrt[3]{0}=0$

<u>Θέτω $x=-t$</u>

$x\to-\infty\Rightarrow t\to+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x^2}\overset{\substack{x=-t\\t\to+\infty}}{=}\lim_{t\to+\infty}\frac{f(-t)}{(-t)^2}\overset{f(-t)=f(t)}{=}\lim_{t\to+\infty}\frac{f(t)}{t^2}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\lim_{t\to+\infty}\frac{f(t)}{t}=0\bullet0=0$$

74.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{x}, x>0$

Ένα σημείο $\mathrm{M}(\beta, f(\beta))$ *κινείται στη* C_f *τετμημένη του μεταβάλλεται με ρυθμό* $\beta'(t)=2t+1$, *και την χρονική στιγμή* $t=0$, *κινητό βρίσκεται στην θέση* $(1,1)$. Ν*α βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας* ω *που σχηματίζει η ευθεία* ΟΜ *με τον άξονα* $x'x$ *ως προς τον χρόνο* t *την χρονική στιγμή* $t=1$.

$\beta'(t)=2t+1=\left(t^2+t\right)'$

Επειδή $\beta'(t)=\left(t^2+t\right)'$ *για κάθε* $t\in[0,+\infty)$ *υπάρχει* $c\in\mathbb{R}$ *τέτοιο ώστε να ισχύει*:

$\beta(t)=t^2+t+c,$ *για κάθε* $t\in[0,+\infty)$

Τ*ην χρονική στιγμή* $t=0,$ *κινητό βρίσκεται στην θέση* $(1,1)$ *οπότε ισχύει*:

$\beta(0)=1\Leftrightarrow 0^2+0+c=1\Leftrightarrow c=1$

Ο*πότε*: $\beta(t)=t^2+t+1$ *για κάθε* $t\in[0,+\infty)$

$(\varepsilon)\not\parallel y'y,\ \mathrm{A}(x_{\mathrm{A}},y_{\mathrm{A}}),\mathrm{B}(x_{\mathrm{B}},y_{\mathrm{B}})\in(\varepsilon)$
$\lambda=\dfrac{y_{\mathrm{B}}-y_{\mathrm{A}}}{x_{\mathrm{B}}-x_{\mathrm{A}}}=\varepsilon\varphi\omega,0\le\omega<\pi,\omega\neq\dfrac{\pi}{2}$
λ: Ο *συντελεστής διεύθυνσης της* (ε)
ω: Η *γωνία που διαγράφει ο άξονας x'x όταν στραφεί αντίθετα με τους δείκτες του ρολογιού έτσι ώστε να συναντήσει την ευθεία* (ε)

$\mathrm{M}(\beta,f(\beta))\in C_f\Rightarrow\mathrm{M}\left(t^2+t+1,\dfrac{1}{t^2+t+1}\right)$

$$\left.\begin{cases}\lambda_{\mathrm{OM}}=\dfrac{y_{\mathrm{M}}-y_{\mathrm{O}}}{x_{\mathrm{M}}-x_{\mathrm{O}}}=\dfrac{\dfrac{1}{t^2+t+1}-0}{t^2+t+1-0}=\dfrac{1}{\left(t^2+t+1\right)^2}\\ \lambda_{\mathrm{OM}}=\varepsilon\varphi\omega(t)\end{cases}\right\}\Rightarrow\varepsilon\varphi\omega(t)=\frac{1}{\left(t^2+t+1\right)^2}$$

$$\varepsilon\varphi\omega(t)=\left(t^2+t+1\right)^{-2}\Rightarrow\left[\varepsilon\varphi\omega(t)\right]'=\left[\left(t^2+t+1\right)^{-2}\right]'$$

$$\frac{\omega'(t)}{\sigma\upsilon\nu^2\omega(t)}=-2\left(t^2+t+1\right)^{-3}(2t+1)\Rightarrow\omega'(t)\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega(t)}=-\frac{2(2t+1)}{\left(t^2+t+1\right)^3}$$

$$\boxed{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}=1+\varepsilon\varphi^2\omega,\omega\neq\kappa\pi+\frac{\pi}{2},\kappa\in\mathbb{Z}}$$

$$\omega'(t)\left[1+\varepsilon\varphi^2\omega(t)\right]=-\frac{2(2t+1)}{\left(t^2+t+1\right)^3}\overset{\varepsilon\varphi\omega(t)=\left(t^2+t+1\right)^{-2}}{\Longrightarrow}$$

$$\omega'(t)\left\{1+\left[\left(t^2+t+1\right)^{-2}\right]^2\right\}=-\frac{2(2t+1)}{\left(t^2+t+1\right)^3}\Rightarrow$$

$$\omega'(t)\left[1+\frac{1}{\left(t^2+t+1\right)^4}\right]=-\frac{2(2t+1)}{\left(t^2+t+1\right)^3}\Rightarrow$$

$$\omega'(t)\frac{\left(t^2+t+1\right)^4+1}{\left(t^2+t+1\right)^4}=-\frac{2(2t+1)}{\left(t^2+t+1\right)^3}\Rightarrow$$

$$\omega'(t)\cancel{\frac{1}{\left(t^2+t+1\right)^3}}\frac{\left(t^2+t+1\right)^4+1}{t^2+t+1}=\cancel{\frac{1}{\left(t^2+t+1\right)^3}}\left[-2(2t+1)\right]\Rightarrow$$

$$\omega'(t)=-\frac{2\left(t^2+t+1\right)(2t+1)}{1+\left(t^2+t+1\right)^4}rad/s$$

Την *χρονική στιγμή* $t_0=1s$ *ορυθμός μεταβολής της γωνίας* ω *θα είναι*:

$$\frac{d\omega}{dt}\Big|_{t_0=1s}=\omega'(t_0)=\omega'(1)=-\frac{2\bullet3\bullet3}{1+3^4}=-\frac{18:2}{82:2}=-\frac{9}{41}rad/s$$

75.

Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *παραγωγίσιμη συνάρτηση που ικανοποιεί την σχέση* $f(x)f(\eta\mu x)=x\eta\mu x$ *τότε μια εκ των ευθειών* $(\delta_1):y=x$ *ή* $(\delta_1):y=-x$ *εφάπτεται της* C_f *στο* $\mathrm{O}(0,0)$

$\text{Αν } x=0 \text{ θα έχω}:$

$f(0)\,f(\eta\mu 0)=0\bullet\eta\mu 0 \Leftrightarrow f^2(0)=0 \Leftrightarrow f(0)=0$

$\text{Επειδή η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } x_0=0 \text{ θα έχω}:$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)\Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=f'(0)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=f'(0)$$

$\left(\text{Θέτω}: t=\eta\mu x\ .\text{Αν} x\to 0\Rightarrow t\to 0\right)$

$$\text{Αν } x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow x\eta\mu x\neq 0$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(x)\,f(\eta\mu x)=x\eta\mu x \\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\frac{f(x)}{x}\frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x}=1 \\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x}=1\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\lim_{x\to 0}\frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x}=1\Rightarrow f'(0)\,f'(0)=1\Rightarrow$$

$$\left[f'(0)\right]^2=1\Rightarrow\left(f'(0)=1 \text{ ή } f'(0)=-1\right)$$

$\text{Αν } (\varepsilon) \text{ η εφαπτομένη της } C_f \text{ στο } \mathrm{O}(0,0) \text{ θα έχω}:$

$$y-f(0)=f'(0)(x-0)\Rightarrow y=f'(0)x$$

$\underline{\text{Αν } f'(0)=1}: y=x$

$\underline{\text{Αν } f'(0)=-1}: y=-x$

76.

(I) Μια συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$. Τότε ισχύει:

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx\right| \le \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|\,dx$$

(II) Μια συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο διάστημα $[0,1]$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\int_{0}^{1} f(t)h(tx)\,dt$ και

$|h(x_1)-h(x_2)| \le \mathrm{K}|x_1-x_2|, \mathrm{K}>0$ στο $\mathbb{R}$ τότε η g είναι συνεχής

$$(\mathrm{I})-\left|f(x)\right|\leq f(x)\leq\left|f(x)\right|\Rightarrow-\int_{\alpha}^{\beta}\left|f(x)\right|dx\leq\int_{\alpha}^{\beta}f(x)\,dx\leq\int_{\alpha}^{\beta}\left|f(x)\right|dx\Rightarrow$$

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta}f(x)\,dx\right|\leq\int_{\alpha}^{\beta}\left|f(x)\right|dx$$

(II) <u>$\Theta\alpha$ *αποδείξω ότι η h είναι συνεχής*</u>

$$\left|h(x)-h(x_0)\right|\leq \mathrm{K}\left|x-x_0\right|\Leftrightarrow-\mathrm{K}\left|x-x_0\right|\leq h(x)-h(x_0)\leq \mathrm{K}\left|x-x_0\right|\Leftrightarrow$$

$$-\mathrm{K}\left|x-x_0\right|+h(x_0)\leq h(x)-\leq \mathrm{K}\left|x-x_0\right|+h(x_0)$$

$$\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})-\mathrm{K}\left|x-x_0\right|+h(x_0)\leq h(x)\leq \mathrm{K}\left|x-x_0\right|+h(x_0)\\(\mathrm{II})\lim\limits_{x\to x_0}\left[-\mathrm{K}\left|x-x_0\right|+h(x_0)\right]=\lim\limits_{x\to x_0}\left[\mathrm{K}\left|x-x_0\right|+h(x_0)\right]=h(x_0)\end{array}\right\}$$

Άρα απο το κριτήριο παρεμβολής έχω $\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=h(x_0)$. *Συνεπώς η h είναι συνεχής.* Ο*πότε και η συνάρτηση* $m(t)=f(t)h(tx),t\in[0,1]$ *είναι συνεχής ως πράξη συνεχών συναρτήσεων.* Σ*υνεπώς υπάρχει το ολοκλήρωμα* $g(x)=\int_0^1 f(t)h(tx)\,dt$

$$\left|g(x)-g(x_0)\right|=\left|\int_0^1 f(t)h(tx)\,dt-\int_0^1 f(t)h(tx_0)\,dt\right|=\left|\int_0^1 f(t)\left[h(tx)-h(tx_0)\right]dt\right|$$

$$\leq \int_0^1 \left| f(t)\left[h(tx)-h(tx_0)\right]\right| dt = \int_0^1 \left| f(t)\right| \left|\left[h(tx)-h(tx_0)\right]\right| dt \leq$$

$$\int_0^1 \left| f(t)\right| \mathrm{K}\left| t(x-x_0)\right| dt = \int_0^1 \left| f(t)\right| t\mathrm{K}\left| x-x_0\right| dt = \mathrm{K}\left| x-x_0\right| \int_0^1 \left| f(t)\right| tdt \Rightarrow$$

$$\left| g(x)-g(x_0)\right| \leq \mathrm{K}\left| x-x_0\right| \int_0^1 \left| f(t)\right| tdt \Rightarrow$$

$$-\mathrm{K}\left|(x-x_0)\right| \int_0^1 \left| f(t)\right| tdt \leq g(x)-g(x_0) \leq \mathrm{K}\left|(x-x_0)\right| \int_0^1 \left| f(t)\right| tdt \Rightarrow$$

$$-\mathrm{K}\left|(x-x_0)\right| \int_0^1 \left| f(t)\right| tdt + g(x_0) \leq g(x) \leq \mathrm{K}\left|(x-x_0)\right| \int_0^1 \left| f(t)\right| tdt + g(x_0)$$

$$\left\{\begin{array}{l} (\mathrm{I}) -\mathrm{K}\left|(x-x_0)\right| \int_0^1 \left| f(t)\right| tdt + g(x_0) \leq g(x) \leq \mathrm{K}\left|(x-x_0)\right| \int_0^1 \left| f(t)\right| tdt + g(x_0) \\ (\mathrm{II}) \lim\limits_{x\to x_0}\left[-\mathrm{K}\left|(x-x_0)\right| \int_0^1 \left| f(t)\right| tdt + g(x_0)\right] = \\ \lim\limits_{x\to x_0}\left[\mathrm{K}\left|(x-x_0)\right| \int_0^1 \left| f(t)\right| tdt + g(x_0)\right] = g(x_0) \end{array}\right\}$$

Ο*πότε απο το κριτήριο παρεμβολής έχω* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$.

Άρα η g συνεχής είναι συνεχής