ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ ΤΗΣ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

1.

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$ για την οποία ισχύουν:

$x^2 f'(x) = xf(x) - f(x)$ *για κάθε* $x>0$, $f(1)=e$ *και* $f(x)\neq 0$ *για κάθε* $x>0$

(I) Να βρείτε τον τύπο της f

(II) Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$

(III) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία

(IV) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^5 f(x)+3x^6-\eta\mu x}{x^6 f(x)-x^7+x+\sigma\upsilon\nu x}$

(V) Να αποδείξετε οτι η f είναι κυρτή

(VI) Να δείξετε οτι δεν υπάρχουν πάνω στην C_f τρία διαφορετικά συνευθειακά σημεία

(VII) Να βρείτε το εμβαδό χωρίου που περικλείεται απο την $C_{f'}$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=e$

$$(I)\ \acute{E}\chi\omega:\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\ \text{Το σύνολο } (0,+\infty) \text{ είναι διάστημα}\\(\mathrm{II})\ \text{Η } f \text{ είναι συνεχής στο } (0,+\infty)\\(\mathrm{III})\ f(x)\neq 0 \text{ για κάθε } x\in(0,+\infty)\end{array}\right\}$$

Άρα θα έχω:

$\big(f(x)>0$ *για κάθε* $x\in(0,+\infty)\big)$ *ή* $\big(f(x)<0$ *για κάθε* $x\in(0,+\infty)\big)$

Επειδή $f(1)>0$ θα έχω $f(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

$$x^2 f'(x) = f(x)(x-1) \overset{\substack{\text{Διαιρώ και τα δυο μέλη}\\ \text{με το } x^2 f(x)}}{\Leftrightarrow} \frac{x^2 f'(x)}{x^2 f(x)} = \frac{f(x)(x-1)}{x^2 f(x)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{x-1}{x^2}\Leftrightarrow\left[\ln f(x)\right]'=\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}\overset{\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}}{\Longleftrightarrow}\left[\ln f(x)\right]'=\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x}\right)'\overset{(\ln x)'=\frac{1}{x},x>0}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left[\ln f(x)\right]'=\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)'$$

$\text{Επειδή}\left[\ln f(x)\right]'=\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)'$ *για κάθε* $x\in(0,+\infty)$ *θα υπάρχει* $c\in\mathbb{R}$ *τέτοιο ώστε να ισχύει*:

$$\ln f(x)=\ln x+\frac{1}{x}+c \text{ για κάθε } x\in(0,+\infty)$$

$$\ln f(1)=\ln 1+\frac{1}{1}+c\overset{f(1)=e}{\Longleftrightarrow}\ln e=1+c\Leftrightarrow 1=1+c\Leftrightarrow c=0$$

$$\left\{\begin{matrix}\ln f(x)=\ln x+\frac{1}{x}\\ x\in(0,+\infty)\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}\ln f(x)-\ln x=\frac{1}{x}\\ x\in(0,+\infty)\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}\ln\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{x}\\ x\in(0,+\infty)\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{matrix}\frac{f(x)}{x}=e^{\frac{1}{x}}\\ x\in(0,+\infty)\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}f(x)=xe^{\frac{1}{x}}\\ x\in(0,+\infty)\end{matrix}\right\}$$

(II)

$$\lambda=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^{\frac{1}{x}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}}\overset{\text{Θέτω}:t=\frac{1}{x}}{=}\lim_{t\to0}e^t=e^0=1$$

$$\left(\text{Θέτω}:t=\frac{1}{x},x\to+\infty\Rightarrow t\to0\right)$$

$$\mu=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\lambda x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(xe^{\frac{1}{x}}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-x}{\frac{1}{x}}\overset{\text{Θέτω}:t=\frac{1}{x}}{=}$$

$$\left(\text{Θέτω}:t=\frac{1}{x},x\to+\infty\Rightarrow t\to0\right)$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{e^t-1}{t}\overset{\substack{\lim_{t\to0}(e^t-1)=\lim_{t\to0}t=0\\ \text{Κανόνας του de L'Hospital}}}{=}\lim_{t\to0}\frac{\left(e^t-1\right)'}{(t)'}=\lim_{t\to0}e^t=e^0=1$$

$\text{Ο}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \sigma\tau o +\infty\ \eta\ C_f\ \acute{\varepsilon}\chi\varepsilon\iota\ \pi\lambda\acute{\alpha}\gamma\iota\alpha\ \alpha\sigma\acute{\upsilon}\mu\pi\tau\omega\tau\eta\ \tau\eta\nu\ \varepsilon\upsilon\theta\varepsilon\acute{\iota}\alpha:$

$y=\lambda x+\mu \Leftrightarrow y=x+1$

$$(\text{III})\ f'(x)=(x)'e^{\frac{1}{x}}+x\left(e^{\frac{1}{x}}\right)'=e^{\frac{1}{x}}+xe^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x}\right)'\overset{\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}}{=}e^{\frac{1}{x}}+xe^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=$$

$$e^{\frac{1}{x}}-\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}=\frac{xe^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x}}}{x}=\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}(x-1)$$

$$f'(x)=\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}(x-1),x>0$$

$$\begin{Bmatrix} f'(x)\geq 0 \\ x>0 \end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}(x-1)\geq 0 \\ x>0 \end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix} x-1\geq 0 \\ x>0 \end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix} x\geq 1 \\ x>0 \end{Bmatrix}\Leftrightarrow x\geq 1$$

$$\begin{Bmatrix} f'(x)< 0 \\ x>0 \end{Bmatrix}\Leftrightarrow 0<x<1$$

$$\text{Ε}\chi\omega:\begin{Bmatrix} (\text{I})\ f'(x)>0\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in(1,+\infty) \\ (\text{II})\ \text{Η}\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o\ x_0=1 \end{Bmatrix}$$

$\acute{\text{Α}}\rho\alpha\ \eta\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \gamma\nu\eta\sigma\acute{\iota}\omega\varsigma\ \alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha\ \sigma\tau o\ [1,+\infty)$

$$\text{Ε}\chi\omega:\begin{Bmatrix} (\text{I})\ f'(x)<0\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in(0,1) \\ (\text{II})\ \text{Η}\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o\ x_0=1 \end{Bmatrix}$$

$\acute{\text{Α}}\rho\alpha\ \eta\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \gamma\nu\eta\sigma\acute{\iota}\omega\varsigma\ \varphi\theta\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha\ \sigma\tau o\ (0,1]$

$$(IV)\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5f(x)+3x^6-\eta\mu x}{x^6f(x)-x^7+x+\sigma\upsilon\nu x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^5f(x)+3x^6-\eta\mu x}{x^6}}{\frac{x^6f(x)-x^7+x+\sigma\upsilon\nu x}{x^6}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^5f(x)}{x^6}+3\frac{x^6}{x^6}-\frac{\eta\mu x}{x^6}}{\frac{x^6(f(x)-x)}{x^6}+\frac{x}{x^6}+\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^6}}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}+3-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x^6}}{\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^5}+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^6}}=$$

$$\frac{1+3-0}{1+0+0}=4$$

$\text{Α}\pi o\ \tau o\ (\text{II})\ \varepsilon\rho\acute{\omega}\tau\eta\mu\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=1$

$\text{Αν } x \neq 0 \text{ θα έχω}:$

$$\left|\frac{\eta\mu x}{x^6}\right| = \frac{1}{x^6}\left|\eta\mu x\right| \leq \frac{1}{x^6}\bullet 1 = \frac{1}{x^6}$$

$$\left|\frac{\eta\mu x}{x^6}\right| \leq \frac{1}{x^6} \Leftrightarrow -\frac{1}{x^6} \leq \frac{\eta\mu x}{x^6} \leq \frac{1}{x^6} \quad \boxed{|x| \leq \theta \Leftrightarrow -\theta \leq x \leq \theta, \theta \geq 0} \quad , \quad \boxed{|\eta\mu x| \leq 1}$$

$$\text{Έχω}:\begin{Bmatrix} (\text{I}) -\frac{1}{x^6} \leq \frac{\eta\mu x}{x^6} \leq \frac{1}{x^6}, x > 0 \\ (\text{II}) \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x^6}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^6} = 0 \end{Bmatrix}$$

$$\text{Οπότε απο το κριτήριο της παρεμβολής θα έχω}: \lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x^6} = 0$$

$\text{Αν } x > 0 \text{ θα έχω}:$

$$\left|\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^6}\right| = \frac{1}{x^6}\left|\sigma\upsilon\nu x\right| \leq \frac{1}{x^6}\bullet 1 = \frac{1}{x^6}, \quad \boxed{|\sigma\upsilon\nu x| \leq 1}$$

$$\text{Έχω}:\begin{Bmatrix} (\text{I}) -\frac{1}{x^6} \leq \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^6} \leq \frac{1}{x^6}, x > 0 \\ (\text{II}) \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x^6}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^6} = 0 \end{Bmatrix}$$

$$\text{Οπότε απο το κριτήριο της παρεμβολής θα έχω}: \lim_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^6} = 0$$

$$(\text{V})\ f'(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}(x-1)}{x} = \frac{xe^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x}}}{x} = \frac{xe^{\frac{1}{x}}}{x} - \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = e^{\frac{1}{x}} - \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$$

$$f''(x) = \left(e^{\frac{1}{x}}\right)' - \frac{\left(e^{\frac{1}{x}}\right)' x - e^{\frac{1}{x}}(x)'}{x^2} = e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x}\right)' - \frac{e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x}\right)' x - e^{\frac{1}{x}}}{x^2} =$$

$$-\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} - \frac{e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)x - e^{\frac{1}{x}}}{x^2} = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} - \frac{-\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} - e^{\frac{1}{x}}}{x^2} = \frac{-\cancel{e^{\frac{1}{x}}} + \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} + \cancel{e^{\frac{1}{x}}}}{x^2} = \frac{\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}}{x^2} = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}$$

$$x > 0 \Rightarrow \begin{Bmatrix} e^{\frac{1}{x}} > 0 \\ x^3 > 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} > 0 \Rightarrow f''(x) > 0$$

$\text{Επειδή } f''(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty) \text{ η } f \text{ είναι κυρτή}$

(VI) *Έστω υπάρχουν τρία διακεκριμένα σημεία* $\mathrm{A}\left(x_1, f\left(x_1\right)\right), \mathrm{B}\left(x_1, f\left(x_1\right)\right)$, $\Gamma\left(x_3, f\left(x_3\right)\right)$ *της* C_f *που είναι συνευθειακά.Χωρίς βλάβη γενικότηρας υποθέτω οτι* $x_1 < x_2 < x_3$.*Τότε τα σημεία* $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma$ *δεν βρίσκονται σε ευθεία παράλληλη με τον άξονα* $y'y$ *γιατί τότε θα υπήρχε ευθεία που είναι παράλληλη με τον άξονα* $y'y$ *και θα έτεμνε την* C_f *σε τρία διαφορετικά σημεία.Επειδή η* C_f *είναι γραφική παράσταση συνάρτησης κάθε ευθεία παράλληλη με το άξονα* $y'y$ *τέμνει την* C_f *το πολύ σε ένα σημείο*

Επειδή $\mathrm{AB} \not\parallel y'y$ *και* $\mathrm{B\Gamma} \not\parallel y'y$ *ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης των ευθειών* AB *και* $\mathrm{B\Gamma}$

$$\left(\text{Τα σημεία } \mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma \text{ είναι συνευθειακά}\right) \Leftrightarrow \mathrm{AB} // \mathrm{B\Gamma} \Leftrightarrow \lambda_{\mathrm{AB}} = \lambda_{\mathrm{B\Gamma}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{f\left(x_2\right) - f\left(x_1\right)}{x_2 - x_1} = \frac{f\left(x_3\right) - f\left(x_2\right)}{x_3 - x_2} (1)$$

$$\text{Έχω}: \left\{\begin{array}{l} (\mathrm{I}) \text{Η } f \text{ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα } \left[x_1, x_2\right] \\ (\mathrm{II}) \text{Η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα } \left(x_1, x_2\right) \end{array}\right\}$$

Οπότε η συνάρτηση f *ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος της μέσης τιμής στο κλειστό διάστημα* $\left[x_1, x_2\right]$.*Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον* $\xi_1 \in \left(x_1, x_2\right)$ *τέτοιο ώστε να ισχύει* $f'\left(\xi_1\right) \frac{f\left(x_2\right) - f\left(x_1\right)}{x_2 - x_1} (2)$

$$\text{Έχω}: \left\{\begin{array}{l} (\mathrm{I}) \text{Η } f \text{ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα } \left[x_2, x_3\right] \\ (\mathrm{II}) \text{Η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα } \left(x_2, x_3\right) \end{array}\right\}$$

Οπότε η συνάρτηση f *ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος της μέσης τιμής στο κλειστό διάστημα* $\left[x_2, x_3\right]$.*Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον* $\xi_2 \in \left(x_2, x_3\right)$ *τέτοιο ώστε να ισχύει* $f'\left(\xi_2\right) = \frac{f\left(x_3\right) - f\left(x_2\right)}{x_3 - x_2} (3)$

Απο τις σχέσεις $(1),(2),(3)$ *έχω*: $f'\left(\xi_1\right) = f'\left(\xi_2\right)$

Επειδή η συνάρτηση f *είναι κυρτή η* f' *είναι γνησίως αύξουσα*

$$\text{Έχω}: x_1 < \xi_1 < x_2 < \xi_2 < x_3 \Rightarrow \xi_1 < \xi_2 \overset{f'\uparrow}{\Longrightarrow} f'\left(\xi_1\right) < f'\left(\xi_2\right) (\text{Άτοπο})$$

$(VII)\ f(x)=xe^{\frac{1}{x}}, x>0$

$$f'(x)=\frac{e^{\frac{1}{x}}(x-1)}{x}, x>0$$

$$\text{Αν } x\in[1,e]\Rightarrow 1\le x\le e\overset{f'\uparrow}{\Longrightarrow} f'(1)\le f'(x)\le f'(e)\Rightarrow 0\le f'(x)\le\frac{e^{\frac{1}{e}}(e-1)}{e}\Rightarrow$$

$$f'(x)\ge 0\Rightarrow |f'(x)|=f'(x)$$

$$\mathrm{E}=\int_1^e|f'(x)|dx=\int_1^e f'(x)dx=\left[f(x)\right]_1^e=f(e)-f(1)=ee^{\frac{1}{e}}-e=e\left(e^{\frac{1}{e}}-1\right)\tau.\mu$$

2.

Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$f'(x)=\ln 2\big(f(x)-x\big)+1$ *για κάθε* $x\in\mathbb{R}$ *και* $f(0)=1$

(I) Να *βρείτε τον τύπο της* f

(II) Να *μελετήσετε την* f *ως προς την μονοτονία*

(III) Να *μελετήσετε την* f *ως προς την κυρτότητα*

(IV) Να *αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη της* f

(V) Να *βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της* C_f *στο* $\big(0,f(0)\big)$

(VI) Να *αποδείξετε ότι* $2^x-x\ln 2\ge 1$ *για κάθε* $x\in\mathbb{R}$

(VII) Να *βρείτε το εμβαδό χωρίου που περικλείεται απο την γραφική παράσταση της* f^{-1}, *τον άξονα* $x'x$, *την ευθεία* $x=1$ *και την ευθεία* $x=3$

$(VIII)$ Να *λύσετε την εξίσωση:* $2^{e^x+x}+e^x=3-x$

$$(I)\ f'(x)=\ln 2\big(f(x)-x\big)+1 \Leftrightarrow f'(x)=\ln 2 f(x)-x\ln 2+1 \Leftrightarrow$$

$$f'(x)-\ln 2 f(x)=-x\ln 2+1 \overset{\substack{\text{Πολλαπλασιάζω και}\\ \text{τα δυο μέλη με το } 2^{-x}}}{\Longleftrightarrow}$$

$$2^{-x}\big(f'(x)-\ln 2 f(x)\big)=2^{-x}(-x\ln 2+1) \Leftrightarrow$$

$$2^{-x}f'(x)-f(x)2^{-x}\ln 2=-2^{-x}x\ln 2+2^{-x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x)2^{-x}+f(x)\big(-2^{-x}\ln 2\big)=x\big(-2^{-x}\ln 2\big)+(x)'\,2^{-x} \overset{(2^{-x})'=-2^{-x}\ln 2}{\Longleftrightarrow}$$

$$f'(x)2^{-x}+f(x)\big(2^{-x}\big)'=x\big(2^{-x}\big)'+(x)'\,2^{-x} \overset{(F(x)G(x))'=F'(x)G(x)+F(x)G'(x)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\big(f(x)2^{-x}\big)'=\big(x2^{-x}\big)'$$

Επειδή $\big(f(x)2^{-x}\big)'=\big(x2^{-x}\big)'$ *για κάθε* $x\in\mathbb{R}$ *θα υπαρχει* $c\in\mathbb{R}$ *τέτοιο ώστε να ισχύει:*

$$f(x)2^{-x}=x2^{-x}+c,\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Αν $x=0$ *θα έχω:*

$$f(0)2^{0}=2^{0}+c \overset{f(0)=1}{\Longleftrightarrow} 1=0+c \Leftrightarrow c=1$$

Οπότε *για κάθε* $x\in\mathbb{R}$ *θα έχω:*

$$f(x)2^{-x}=x2^{-x}+1 \overset{\substack{\text{Πολλαπλασιάζω και}\\ \text{τα δυο μέλη με το } 2^{x}}}{\Longleftrightarrow} f(x)2^{-x}2^{x}=\big(x2^{-x}+1\big)2^{x} \Leftrightarrow$$

$$f(x)2^{0}=x2^{-x}2^{x}+2^{x} \Leftrightarrow f(x)2^{0}=x2^{0}+2^{x} \Leftrightarrow f(x)=x+2^{x}$$

Οπότε *για κάθε* $x\in\mathbb{R}$ *θα έχω:*

$$f(x)=2^{x}+x$$

$$(\text{II})\ f'(x)=\left(2^x\right)'+\left(x\right)' \overset{\left(\alpha^x\right)'=\alpha^x\ln\alpha,0<\alpha\neq1}{=} 2^x\ln2+1$$

$$\left.\begin{cases}2^x>0\\2>1\end{cases}\right\}\Rightarrow\left.\begin{cases}2^x>0\\\ln2>\ln1\end{cases}\right\}\Rightarrow\left.\begin{cases}2^x>0\\\ln2>0\end{cases}\right\}\Rightarrow 2^x\ln2>0\Rightarrow 2^x\ln2+1>1>0\Rightarrow$$

$$2^x\ln2+1>0\Rightarrow f'(x)>0$$

Επειδή $f'(x)>0$ *για κάθε* $x\in\mathbb{R}$ *η* f *είναι γνησίως αύξουσα*

$$(\text{III})\ f''(x)=\left(2^x\ln2+1\right)'=\ln2\left(2^x\right)'+\left(1\right)'=\ln2 2^x\ln2=2^x\ln^2 2$$

Επειδή $f''(x)>0$ *για κάθε* $x\in\mathbb{R}$ *η* f *είναι κυρτή*

(IV) Επειδή *η συνάρτηση* f *είναι είναι γνησίως αύξουσα θα είναι και* "1−1". *Συνεπώς υπάρχει η αντίστροφη της* f

(V) *Έστω η* (ε) *εφαπτομένη της* C_f *στο σημείο επαφής* $\left(0,f(0)\right)$. Τ*ότε η ευθεία* (ε) *θα έχει εξίσωση*:

$$y-f(0)=f'(0)(x-0)\ \underset{}{\overset{\substack{f(x)=2^x+x\\f'(x)=2^x\ln2+1}}{\Longleftrightarrow}}\ y-1=\left(\ln2+1\right)x\Leftrightarrow y=\left(\ln2+1\right)x+1$$

$$(\varepsilon): y=\left(\ln2+1\right)x+1$$

(VI) Επειδή *η* f *είναι κυρτή η* C_f *βρίσκεται πάνω απο την ευθεία* (ε)

Άρα θα ισχύει:

$$f(x)\geq\left(\ln2+1\right)x+1\Leftrightarrow f(x)\geq\left(\ln2+1\right)x+1\Leftrightarrow \overset{f(x)=2^x+x}{\Longleftrightarrow}\ \cancel{x}+2^x\geq x\ln2+\cancel{x}+1\Leftrightarrow$$

$$2^x\geq x\ln2+1\Leftrightarrow 2^x-x\ln2\geq1$$

$(VII)\,Έχω: D_f = \mathbb{R}$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} +\infty, 0<a<1 \\ 0, a>1 \end{cases}, \lim_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} 0, 0<a<1 \\ +\infty, a>1 \end{cases}}$$

$Έχω: \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x+2^x\right) = \lim_{x\to-\infty} x + \lim_{x\to-\infty} 2^x = -\infty + 0 = -\infty$

$Έχω: \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x+2^x\right) = \lim_{x\to+\infty} x + \lim_{x\to+\infty} 2^x = +\infty + \infty = +\infty$

$$\left\{\begin{matrix} (\mathrm{I})\,\mathrm{H}\ f\ είναι\ γνησίως\ αύξουσα\ στο\ (-\infty,+\infty) \\ (\mathrm{II})\,\mathrm{H}\ f\ είναι\ συνεχής\ στο\ (-\infty,+\infty) \end{matrix}\right\}$$

$\mathrm{O}πότε: f\left((-\infty,+\infty)\right) = \left(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) = (-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$

$Άρα: f\left(D_f\right) = \mathbb{R}$

$\mathrm{O}πότε: D_{f^{-1}} = f\left(D_f\right) = \mathbb{R}$

$\mathrm{A}ν\ y_1, y_2 \in D_{f^{-1}}\ με\ y_1 < y_2$

$$y_1, y_2 \in D_{f^{-1}} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} f^{-1}(y_1) = x_1 \\ f^{-1}(y_2) = x_2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y_1 = f(x_1) \\ y_2 = f(x_2) \end{Bmatrix}$$

$$y_1 < y_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \overset{f\uparrow}{\Longleftrightarrow} x_1 < x_2 \Leftrightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$$

$\mathrm{O}πότε\ η\ f^{-1}\ είναι\ γνησίως\ αύξουσα$

$Έχω: \mathrm{E} = \int_1^3 \left|f^{-1}(y)\right| dy$

$$f^{-1}(1) = x_1 \Leftrightarrow 1 = f(x_1) \overset{f(0)=1}{\Longleftrightarrow} f(0) = f(x_1) \overset{f\ "1-1"}{\Longleftrightarrow} x_1 = 0$$

$\mathrm{O}πότε: f^{-1}(1) = 0$

$$f^{-1}(3) = x_2 \Leftrightarrow 3 = f(x_2) \overset{f(1)=3}{\Longleftrightarrow} f(1) = f(x_2) \overset{f\ "1-1"}{\Longleftrightarrow} x_2 = 1$$

$\mathrm{O}πότε: f^{-1}(1) = 3$

$$y \in [1,3] \Rightarrow y \geq 1 \overset{f^{-1}\uparrow}{\Longrightarrow} f^{-1}(y) \geq f^{-1}(1) \Rightarrow f^{-1}(y) \geq 0 \Rightarrow \left|f^{-1}(y)\right| = f^{-1}(y)$$

$\mathrm{O}πότε: \mathrm{E} = \int_1^3 \left|f^{-1}(y)\right| dy = \int_1^3 f^{-1}(y) dy$

$\Theta\acute{\varepsilon}\tau\omega: u = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(u) \Rightarrow dy = f'(u)du$

$\text{A}\nu\ y = 1: u = f^{-1}(1) \Leftrightarrow u = 0$

$\text{A}\nu\ y = 3: u = f^{-1}(3) \Leftrightarrow u = 1$

$$\text{E} = \int_1^3 f^{-1}(y)dy = \int_0^1 u f'(u)\,du = \left[uf(u)\right]_0^1 - \int_0^1 f(u)(u)'du = f(1) - \int_0^1 f(u)du$$

$$\overset{f(u)=2^u+u}{=} 3 - \int_0^1 (2^u + u)du = 3 - \left(\int_0^1 2^u du + \int_0^1 udu\right) = 3 - \left(\left[\frac{2^u}{\ln 2}\right]_0^1 + \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1\right) =$$

$$= 3 - \left(\left[\frac{2^u}{\ln 2} + \frac{u^2}{2}\right]_0^1\right) = 3 - \left[\left(\frac{2}{\ln 2} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{\ln 2} + \frac{0^2}{2}\right)\right] = 3 - \left(\frac{2}{\ln 2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{\ln 2}\right) =$$

$$= 3 - \left(\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{2}\right) = 3 - \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{2} = \frac{6}{2} - \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{2} = \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{\ln 2}\right)\tau.\mu$$

$(VIII)\ 2^{e^x+x} + e^x = 3 - x \Leftrightarrow 2^{e^x+x} + e^x + x = 3 \overset{f(x)=2^x+x}{\Leftrightarrow} f(e^x + x) = f(1) \overset{f\ "1-1"}{\Leftrightarrow}$

$e^x + x = 1 \Leftrightarrow e^x + x - 1 = 0\,(1)$

$\Theta\varepsilon\omega\rho\acute{\omega}\ \tau\eta\nu\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ h(x) = e^x + x - 1, x \in \mathbb{R}$

$h'(x) = (e^x + x - 1)' = (e^x)' + (x)' - (1)' = e^x + 1$

$$\underline{\left.\begin{cases} e^x > 0 \\ 1 > 0 \end{cases}\right\}(+)}$$

$e^x + 1 > 0 \Rightarrow h'(x) > 0$

Επειδή $h'(x) > 0$ *για κάθε* $x \in \mathbb{R}$ *η* h *είναι γνησίως αύξουσα.*

Επειδή *η* h *είναι γνησίως αύξουσα θα είναι* "1−1"

$(1) \Leftrightarrow e^x + x - 1 = 0 \Leftrightarrow h(x) = 0 \overset{h(0)=0}{\Longleftrightarrow} h(x) = h(0) \overset{h\ "1-1"}{\Longleftrightarrow} x = 0$

3.

$\Delta \acute{\iota}\nu\varepsilon\tau\alpha\iota\ \eta\ \ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f(x)=10^{\frac{x}{10}}, x\in\mathbb{R}$

(I) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και την κυρτότητα

(II) Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(0,10)$ στο οποίο η εφαπτομένη της C_f να είναι παράλληλη στην ευθεία $10y-9x+4=0$

(III) Να δείξετε ότι υπάρχει $\rho_1\in(0,6), \rho_2\in(6,10)$ τέτοια ώστε

$$3f'(\rho_1)+2f'(\rho_2)=\frac{9}{2}$$

(IV) Αφού αποδείξετε ότι υπάρχει $\gamma\in(0,10)$ τέτοιο ώστε $f(\gamma)=7$ να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(0,10)$ τέτοια ώστε:

$$\frac{2}{f'(\xi_1)}+\frac{1}{f'(\xi_2)}=\frac{10}{3}$$

(V) Αφού αποδείξετε ότι υπάρχει $\delta\in(0,10)$ τέτοιο ώστε $f(\delta)=10-\delta$ να δείξετε ότι υπάρχουν $\kappa,\lambda\in(0,10)$ τέτοια ώστε:

$$f'(\kappa)f'(\lambda)=\frac{9-\delta}{10-\delta}$$

(V) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $(0,f(0))$

(VI) Να δείξετε ότι $f(x)\geq\frac{\ln 10}{10}x+1$, για κάθε $x\in[0,10]$

(VII) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\int_0^x f(t)dt+\int_4^x f(t)dt+x=0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(0,10)$

$$(I)\ f'(x)=\left(10^{\frac{x}{10}}\right)'=10^{\frac{x}{10}}\ln 10\left(\frac{x}{10}\right)'=\frac{\ln 10\,10^{\frac{x}{10}}}{10}$$

$$\left.\begin{cases}10>1\\ 10^{\frac{x}{10}}>0\end{cases}\right\}\Rightarrow\left.\begin{cases}\ln 10>\ln 1\\ 10^{\frac{x}{10}}>0\end{cases}\right\}\Rightarrow\left.\begin{cases}\ln 10>0\\ 10^{\frac{x}{10}}>0\end{cases}\right\}\Rightarrow \ln 10\,10^{\frac{x}{10}}>0\Rightarrow\frac{\ln 10\,10^{\frac{x}{10}}}{10}>0\Rightarrow$$

$$f'(x)>0$$

$\text{Επειδή η } f'(x)>0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} \text{ η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα}$

$$f''(x)=\left(\frac{\ln 10\, 10^{\frac{x}{10}}}{10}\right)'=\frac{\ln 10}{10}\left(10^{\frac{x}{10}}\right)'=\frac{\ln 10}{10}\frac{\ln 10}{10}10^{\frac{x}{10}}=\left(\frac{\ln 10}{10}\right)^2 10^{\frac{x}{10}}>0$$

$\text{Επειδή } f''(x)>0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} \text{ η } f \text{ είναι κυρτή}$

$(II)(\varepsilon):10y-9x+4=0$

$\text{Ο συντελεστής διεύθυνσης της } (\varepsilon) \text{ είναι:}$

$$\lambda_\varepsilon=-\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=-\frac{-9}{10}=\frac{9}{10}$$

$$\text{Έχω}:\begin{Bmatrix}(\mathrm{I})\text{Η } f \text{ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα } [0,10]\\ (\mathrm{II})\text{Η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα } (0,10)\end{Bmatrix}$$

Οπότε η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος της μέσης τιμής στο κλειστό διάστημα $[0,10]$.Οπότε ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,10)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f'(x_0)=\dfrac{f(10)-f(0)}{10-0}$

$$\begin{Bmatrix}f'(x_0)=\dfrac{f(10)-f(1)}{10}\\ x_0\in(0,10)\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}f'(x_0)=\dfrac{10^{\frac{10}{10}}-10^{\frac{0}{10}}}{10}\\ x_0\in(0,10)\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}f'(x_0)=\dfrac{10-1}{10}\\ x_0\in(0,10)\end{Bmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}f'(x_0)=\dfrac{9}{10}\\ x_0\in(0,10)\end{Bmatrix}$$

Αν (l) η εφαπτομένη της C_f στο σημείο επαφής $\mathrm{A}(x_0,f(x_0))$.Τότε θα έχω:

$$\lambda_l=f'(x_0)=\frac{9}{10}$$

Επειδή $\lambda_l=\lambda_\varepsilon$ θα έχω $(l)//(\varepsilon)$.Οπότε υπάρχει $x_0\in(0,10)$ στο οποίο η εφαπτομένη της C_f στο σημείο επαφής $\mathrm{A}(x_0,f(x_0))$ να είναι παράλληλη με την ευθεία (ε)

$$(III)\,Έχω:\left\{\begin{matrix}(\mathrm{I})\,\text{Η } f \text{ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα } [0,6] \\ (\mathrm{II})\,\text{Η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα } (0,6)\end{matrix}\right\}$$

Οπότε η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος της μέσης τιμής στο κλειστό διάστημα $[0,6]$.Οπότε ένα τουλάχιστον $\rho_1 \in (0,6)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f'(\rho_1) = \dfrac{f(6)-f(0)}{6-0}$

$$\left\{\begin{matrix} f'(\rho_1) = \dfrac{f(6)-10^{\frac{0}{10}}}{6} \\ \rho_1 \in (0,6)\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} f'(\rho_1) = \dfrac{f(6)-1}{6} \\ \rho_1 \in (0,6)\end{matrix}\right\}$$

$$Έχω:\left\{\begin{matrix}(\mathrm{I})\,\text{Η } f \text{ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα } [6,10] \\ (\mathrm{II})\,\text{Η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα } (6,10)\end{matrix}\right\}$$

Οπότε η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος της μέσης τιμής στο κλειστό διάστημα $[6,10]$.Οπότε ένα τουλάχιστον $\rho_2 \in (6,10)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f'(\rho_2) = \dfrac{f(10)-f(6)}{10-6}$

$$\left\{\begin{matrix} f'(\rho_2) = \dfrac{10^{\frac{10}{10}}-f(6)}{4} \\ \rho_1 \in (0,6)\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} f'(\rho_2) = \dfrac{10-f(6)}{4} \\ \rho_2 \in (0,6)\end{matrix}\right\}$$

$$3f'(\rho_1)+2f'(\rho_2) = 3\frac{f(6)-1}{6} + 2\frac{10-f(6)}{4} = \frac{f(6)-1}{2} + \frac{10-f(6)}{2} = \frac{9}{2}$$

$$(V)\, f(0) < 7 < f(10) \Leftrightarrow 10^{\frac{0}{10}} < 7 < 10^{\frac{10}{10}} \Leftrightarrow 1 < 7 < 10\,(\text{Ισχύει})$$

$$Έχω:\left\{\begin{matrix}(\mathrm{I})\,\text{Η } f \text{ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα } [0,10] \\ (\mathrm{II})\, f(0) < 7 < f(10)\end{matrix}\right\}$$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών υπάρχει $\gamma \in (0,10)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f(\gamma) = 7$

$$\text{Έχω}:\begin{cases}(\mathrm{I})\,\text{Η } f \text{ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα } [0,\gamma] \\ (\mathrm{II})\,\text{Η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα } (0,\gamma)\end{cases}$$

Οπότε η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος της μέσης τιμής στο κλειστό διάστημα $[0,\gamma]$.Οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (0,\gamma)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f'(\xi_1)=\dfrac{f(\gamma)-f(0)}{\gamma-0}$

$$\begin{cases} f'(\xi_1)=\dfrac{f(\gamma)-f(0)}{\gamma-0} \\ \xi_1 \in (0,\gamma)\end{cases} \overset{\substack{f(\gamma)=7 \\ f(0)=1}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} f'(\xi_1)=\dfrac{7-1}{\gamma} \\ \xi_1 \in (0,\gamma)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(\xi_1)=\dfrac{6}{\gamma} \\ \xi_1 \in (0,\gamma)\end{cases}$$

$$\text{Έχω}:\begin{cases}(\mathrm{I})\,\text{Η } f \text{ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα } [\gamma,10] \\ (\mathrm{II})\,\text{Η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα } (\gamma,10)\end{cases}$$

Οπότε η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος της μέσης τιμής στο κλειστό διάστημα $[\gamma,10]$.Οπότε ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (\gamma,10)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f'(\xi_2)=\dfrac{f(10)-f(\gamma)}{10-\gamma}$

$$\begin{cases} f'(\xi_2)=\dfrac{f(10)-f(\gamma)}{10-\gamma} \\ \xi_2 \in (\gamma,10)\end{cases} \overset{\substack{f(\gamma)=7 \\ f(10)=10}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} f'(\xi_2)=\dfrac{10-7}{10-\gamma} \\ \xi_2 \in (\gamma,10)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(\xi_2)=\dfrac{3}{10-\gamma} \\ \xi_2 \in (\gamma,10)\end{cases}$$

$$\frac{2}{f'(\xi_1)}+\frac{1}{f'(\xi_2)} \overset{\substack{f'(\xi_1)=\frac{6}{\gamma} \\ f'(\xi_2)=\frac{3}{10-\gamma}}}{=} \frac{2}{\frac{6}{\gamma}}+\frac{1}{\frac{3}{10-\gamma}}=\frac{2\gamma}{6}+\frac{10-\gamma}{3}=\frac{\gamma}{3}+\frac{10-\gamma}{3}=\frac{10}{3}$$

(V)Θεωρώ την συνάρτηση $g(x)=f(x)+x-10$

$$\begin{cases} g(0)=f(0)+0-10=1-10=-9<0 \\ g(10)=f(10)+10-10=10+10-10=10>0\end{cases} \Rightarrow g(0)g(10)<0$$

$$\text{Έχω}:\begin{cases}(\mathrm{I})\,\text{Η συνάρτηση } g \text{ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα } [0,10] \\ \text{ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων} \\ (\mathrm{II})\, g(0)g(10)<0\end{cases}$$

Οπότε η συνάρτηση g ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος του Bolzano στο κλειστό διάστημα $[0,10]$.Οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\delta \in (0,10)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $g(\delta)=0$

$$\left\{\begin{matrix} g(\delta)=0 \\ \delta \in (0,10) \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} f(\delta)+\delta-10=0 \\ \delta \in (0,10) \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} f(\delta)=10-\delta \\ \delta \in (0,10) \end{matrix}\right\}$$

$$Έχω:\left\{\begin{matrix} (\mathrm{I})\text{Η } f \text{ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα } [0,\delta] \\ (\mathrm{II})\text{Η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα } (0,\delta) \end{matrix}\right\}$$

Οπότε η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος της μέσης τιμής στο κλειστό διάστημα $[0,\delta]$.Οπότε ένα τουλάχιστον $\kappa \in (0,\delta)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f'(\kappa)=\dfrac{f(\delta)-f(0)}{\delta-0}$

$$\left\{\begin{matrix} f'(\kappa)=\dfrac{f(\delta)-f(0)}{\delta-0} \\ \kappa \in (0,\delta) \end{matrix}\right\} \overset{\substack{f(\delta)=10-\delta \\ f(0)=1}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{matrix} f'(\kappa)=\dfrac{10-\delta-1}{\delta} \\ \kappa \in (0,\delta) \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} f'(\kappa)=\dfrac{9-\delta}{\delta} \\ \kappa \in (0,\delta) \end{matrix}\right\}$$

$$Έχω:\left\{\begin{matrix} (\mathrm{I})\text{Η } f \text{ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα } [\delta,10] \\ (\mathrm{II})\text{Η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα } (\delta,10) \end{matrix}\right\}$$

Οπότε η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος της μέσης τιμής στο κλειστό διάστημα $[\delta,10]$.Οπότε ένα τουλάχιστον $\lambda \in (\delta,10)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f'(\lambda)=\dfrac{f(10)-f(\delta)}{10-\delta}$

$$\left\{\begin{matrix} f'(\lambda)=\dfrac{f(10)-f(\delta)}{10-\delta} \\ \kappa \in (\delta,10) \end{matrix}\right\} \overset{\substack{f(\delta)=10-\delta \\ f(10)=10}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{matrix} f'(\lambda)=\dfrac{10-(10-\delta)}{10-\delta} \\ \kappa \in (\delta,10) \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} f'(\lambda)=\dfrac{\delta}{10-\delta} \\ \kappa \in (\delta,10) \end{matrix}\right\}$$

$$f'(\kappa)\,f'(\lambda)=\frac{9-\delta}{\delta}\,\frac{\delta}{10-\delta}=\frac{9-\delta}{10-\delta}$$

(V)Έστω (η) η εφαπτομένη της C_f στο σημείο επαφής $(0,f(0))$.Τότε η ευθεία (η) θα έχει εξίσωση :

$$y-f(0)=f'(0)(x-0)\overset{\substack{f(x)=10^{\frac{x}{10}} \\ f'(x)=\frac{\ln 10\, 10^{\frac{x}{10}}}{10}}}{\Longleftrightarrow} y-1=\frac{\ln 10}{10}x \Leftrightarrow y=\frac{\ln 10}{10}x+1$$

$$(\eta): y=\frac{\ln 10}{10}x+1$$

(VI) Επειδή η f είναι κυρτή η C_f βρίσκεται πάνω απο την ευθεία (η)

Άρα θα ισχύει:

$$f(x)\geq \frac{\ln 10}{10}x+1$$

(VII) Θεωρώ την συνάρτηση $h(x)=\int_0^x f(t)dt+\int_4^x f(t)dt+x, x\in[0,10]$

$$h(0)=\int_0^0 f(t)dt+\int_4^0 f(t)dt+0=-\int_0^4 f(t)dt$$

$$t\in[0,10]\Leftrightarrow 0\leq t\leq 10 \overset{f\uparrow}{\Longleftrightarrow} f(0)\leq f(t)\leq f(10)\Leftrightarrow 1\leq f(t)\leq 10 \Rightarrow f(t)>0\Rightarrow$$

$$\text{Έχω}:\left\{\begin{matrix}(\mathrm{I})\ \text{Η } f \text{ είναι συνεχής στο } [0,10] \\ (\mathrm{II})\ f(t)>0 \text{ για κάθε } t\in[0,10]\end{matrix}\right\}\Rightarrow \int_0^4 f(t)dt>\int_0^4 0dt\Rightarrow \int_0^4 f(t)dt>0$$

$$\Rightarrow -\int_0^4 f(t)dt<0\Rightarrow h(0)<0$$

$$h(10)=\int_0^{10} f(t)dt+\int_4^{10} f(t)dt+10$$

$$\text{Έχω}:\left\{\begin{matrix}(\mathrm{I})\ \text{Η } f \text{ είναι συνεχής στο } [0,10] \\ (\mathrm{II})\ f(t)>0 \text{ για κάθε } t\in[0,10]\end{matrix}\right\}\Rightarrow \int_0^{10} f(t)dt>\int_0^{10} 0dt\Rightarrow \int_0^{10} f(t)dt>0$$

$$\text{Έχω}:\left\{\begin{matrix}(\mathrm{I})\ \text{Η } f \text{ είναι συνεχής στο } [4,10] \\ (\mathrm{II})\ f(t)>0 \text{ για κάθε } t\in[4,10]\end{matrix}\right\}\Rightarrow \int_4^{10} f(t)dt>\int_4^{10} 0dt\Rightarrow \int_4^{10} f(t)dt>0$$

$$\left\{\begin{matrix}\int_0^{10} f(t)dt>0 \\ \int_4^{10} f(t)dt>0 \\ 1>0\end{matrix}\right\}(+)$$

$$\int_0^{10} f(t)dt+\int_4^{10} f(t)dt+1>0\Rightarrow h(10)>0$$

$$\left\{\begin{matrix}h(0)<0 \\ h(10)>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow h(0)h(10)<0$$

Επειδή η f είναι συνεχής θα είναι και συνεχής στα διαστήματα $\left[0,x\right]$ και $\left[4,x\right], x\in\left[0,10\right]$.Συνεπώς οι συναρτήσεις $\int_0^x f\left(t\right)dt, \int_4^x f\left(t\right)dt$ είναι παραγωγίσιμες.Οπότε οι συναρτήσεις $\int_0^x f\left(t\right)dt, \int_4^x f\left(t\right)dt$ είναι συνεχεις ως παραγωγίσιμες.Συνεπώς και η συνάρτηση h είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων

$$\text{Έχω}:\begin{cases}\left(\mathrm{I}\right)\text{Η συνάρτηση } h \text{ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα } \left[0,10\right]\\ \left(\mathrm{II}\right) h\left(0\right)h\left(10\right)<0\end{cases}$$

Οπότε η συνάρτηση h ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος του Bolzano στο κλειστό διάστημα $\left[0,10\right]$.Οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in\left(0,10\right)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $h\left(\delta\right)=0$

$$\begin{Bmatrix} h\left(\xi\right)=0\\ \xi\in\left(0,10\right)\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}\int_0^\xi f\left(t\right)dt+\int_4^\xi f\left(t\right)dt+\xi=0\\ \xi\in\left(0,10\right)\end{Bmatrix}$$

4.

Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\left[0,2\right]\to\mathbb{R}$ ισχύει

$\int_0^1 f\left(t\right)dt=1$ και $\int_1^2 f\left(t\right)dt=5$

Να δείξετε ότι:

$\left(I\right)$ Υπάρχει $x_0\in\left(0,1\right)$ τέτοιο ώστε $f\left(x_0+1\right)=4+f\left(x_0\right)$

$\left(II\right)$ Υπάρχει $\xi\in\left(0,2\right)$ τέτοιο ώστε $f'\left(\xi\right)=4$

$\left(III\right)$ Υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in\left(0,2\right)$ με $\xi_2-\xi_1=1$ τέτοια ώστε $f\left(\xi_1\right)+f\left(\xi_2\right)=6$

$\left(IV\right)$ Η εξίσωση $3\int_0^x f\left(t\right)dt=21-2x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $\left(0,2\right)$

Επειδή η συνάρτηση f είναι παραγγωγίσιμη στο $[0,2]$ θα είναι και συνεχής στο $[0,2]$. Τότε αν θεωρήσω την συνάρτηση $F(x)=\int_0^x f(t)dt, x\in[0,2]$ τότε θα ισχύει $F'(x)=f(x)$. Άρα η F είναι παράγουσα της f στο $[0,2]$. Συνεπώς υπάρχει παράγουσα της f στο $[0,2]$. Έστω G είναι παράγουσα της f στο $[0,2]$. Οπότε θα έχω:

$G:[0,2]\to\mathbb{R}$ με $G'(x)=f(x)$, για κάθε $x\in[0,2]$

$$\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\ \text{Η } f \text{ είναι συνεχής στο } [0,1]\\ (\mathrm{II})\ \text{Η } G \text{ είναι παράγουσα της } f \text{ στο } [0,1]\end{array}\right\}$$

Οπότε απο θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμόυ θα έχω:

$$\int_0^1 f(t)dt=G(1)-G(0)\overset{\int_0^1 f(t)dt=1}{\Longrightarrow} G(1)-G(0)=1$$

$$\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\ \text{Η } f \text{ είναι συνεχής στο } [0,2]\\ (\mathrm{II})\ \text{Η } G \text{ είναι παράγουσα της } f \text{ στο } [0,2]\end{array}\right\}$$

Οπότε απο θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμόυ θα έχω:

$$\int_1^2 f(t)dt=G(2)-G(1)\overset{\int_0^2 f(t)dt=5}{\Longrightarrow} G(2)-G(1)=5$$

Θεωρώ την συνάρτηση $g(x)=G(x+1)-G(x)-4x, x\in[0,1]$

$x\in[0,1]\Leftrightarrow 0\le x\le 1\Leftrightarrow 0\le x+1\le 2\Leftrightarrow x+1\in[0,2]$

$\Sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\acute{\omega}\varsigma\ \upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota\ \tau o\ G(x+1)\ \gamma\iota\alpha\tau\acute{\iota}\ x+1\in[0,2]$

$\acute{E}\chi\omega: x\in[0,1]\subseteq[0,2]\Rightarrow x\in[0,2]$

$\Sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\acute{\omega}\varsigma\ \upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota\ \tau o\ G(x)\ \gamma\iota\alpha\tau\acute{\iota}\ \tau o\ x\in[0,2]$

Άρα η συνάρτηση g είναι ορισμένη στο $[0,1]$

Η *συνάρτηση* $G(x+1)$ *είναι συνεχής στο* $[0,1]$ *ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων* $x+1$ *και* $G(x+1)$.Η *συνάρτηση* $-4x$ *είναι συνεχής στο* $[0,1]$ *ως πολυωνυμικά*.Ο*πότε η συνάρτηση g είναι συνεχής στο* $[0,1]$ *ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.*

Η *συνάρτηση* $G(x+1)$ *είναι παραγωγίσιμη στο* $(0,1)$ *ως σύνθεση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων* $x+1$ *και* $G(x+1)$.Η *συνάρτηση* $-4x$ *είναι παραγωγίσιμη στο* $(0,1)$ *ως πολυωωνυμική*.Ο*πότε η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο* $(0,1)$ *ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων.*

Ο*πότε για κάθε* $x\in(0,1)$ *θα έχω*:

$$g'(x)=\left(G(x+1)-G(x)-4x\right)'=G'(x+1)(x+1)'-G'(x)-4(x)'=$$
$$=f(x+1)-f(x)-4$$

$$\left.\begin{cases} g(0)=G(1)-G(0)=1 \\ g(1)=G(2)-G(1)-4=5-4=1\end{cases}\right\}\Rightarrow g(0)=g(1)$$

$$\acute{E}\chi\omega:\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\,\mathrm{H}\ g\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ \kappa\lambda\varepsilon\iota\sigma\tau\acute{o}\ \delta\iota\acute{\alpha}\sigma\tau\eta\mu\alpha\ [0,1] \\ (\mathrm{II})\,\mathrm{H}\ g\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \pi\alpha\rho\alpha\gamma\omega\gamma\acute{\iota}\sigma\iota\mu\eta\ \sigma\tau o\ \alpha\nu o\iota\kappa\tau\acute{o}\ \delta\iota\acute{\alpha}\sigma\tau\eta\mu\alpha\ (0,1) \\ (\mathrm{III})\ g(0)=g(1)\end{array}\right\}$$

Άρα η συνάρτηση g ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο κλειστό διάστημα $[0,1]$.Ο*πότε υπάρχει ένα τουλάχιστον* $x_0\in(0,1)$ *τέτοιο ώστε να ισχύει* $g'(x_0)=0$

$$\begin{Bmatrix} g'(x_0)=0 \\ x_0\in(0,1)\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix} f(x_0+1)-f(x_0)-4=0 \\ x_0\in(0,1)\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix} f(x_0+1)=f(x_0)=4 \\ x_0\in(0,1)\end{Bmatrix}$$

$(\mathrm{II})\,\acute{E}\chi\omega: 0<x_0<1\Rightarrow 1<x_0+1<2$

Ο$\pi\acute{o}\tau\varepsilon: 0<x_0<1<x_0+1<2\Rightarrow 0<x_0<x_0+1<2\Rightarrow[x_0,x_0+1]\subseteq[1,2]$

Επειδή η f *είναι παραγωγίσιμη στο* $[1,2]$ *και* $(x_0,x_0+1)\subseteq[1,2]$ *θα είναι παραγωγίσιμη στο* (x_0,x_0+1)

$$\begin{cases}(\mathrm{I})\,\text{Η } f \textit{ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα } [x_0,x_0+1]\\ (\mathrm{II})\,\text{Η } f \textit{ είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα } (x_0,x_0+1)\end{cases}$$

Άρα η συνάρτηση f *ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος της μέσης τιμής στο κλειστό διάστημα* $[x_0,x_0+1]$.Ο*πότε υπάρχει ένα τουλάχιστον* $\xi\in(x_0,x_0+1)$ *τέτοιο ώστε να ισχύει* $f'(\xi)=\dfrac{f(x_0+1)-f(x_0)}{x_0+1-x_0}$

$$\begin{cases}f'(\xi)=f(x_0+1)-f(x_0)\\ \xi\in(x_0,x_0+1)\end{cases}\overset{f(x_0+1)=4+f(x_0)}{\Longrightarrow}\begin{cases}f'(\xi)=4+f(x_0)-f(x_0)\\ \xi\in(x_0,x_0+1)\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}f'(\xi)=4\\ \xi\in(x_0,x_0+1)\end{cases}$$

Έχω: $1<x_0<\xi<x_0+1<2\Rightarrow 1<\xi<2\Rightarrow \xi\in(1,2)$

(III) Θ*εωρώ την συνάρτηση* $h(x)=G(x+1)+G(x)-6x,\ x\in[0,1]$

$x\in[0,1]\Leftrightarrow 0\le x\le 1\Leftrightarrow 0\le x+1\le 2\Leftrightarrow x+1\in[0,2]$

Σ*υνεπώς υπάρχει το* $G(x+1)$ *γιατί* $x+1\in[0,2]$

Έχω: $x\in[0,1]\subseteq[0,2]\Rightarrow x\in[0,2]$

Σ*υνεπώς υπάρχει το* $G(x)$ *γιατί το* $x\in[0,2]$

Άρα η συνάρτηση h *είναι ορισμένη στο* $[0,1]$

Η *συνάρτηση* $G(x+1)$ *είναι συνεχής στο* $[0,1]$ *ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων* $x+1$ *και* $G(x+1)$.Η *συνάρτηση* $-6x$ *είναι συνεχής στο* $[0,1]$ *ως πολυωνυμικά.*Ο*πότε η συνάρτηση* h *είναι συνεχής στο* $[0,1]$ *ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.*

Η *συνάρτηση* $G(x+1)$ *είναι παραγωγίσιμη στο* $(0,1)$ *ως σύνθεση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων* $x+1$ *και* $G(x+1)$.Η *συνάρτηση* $-6x$ *είναι παραγωγίσιμη στο* $(0,1)$ *ως πολυωωνυμική.*Ο*πότε η συνάρτηση* h *είναι παραγωγίσιμη στο* $(0,1)$ *ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων.*

Οπότε για κάθε $x \in (0,1)$ θα έχω:

$$h'(x) = \left(G(x+1) + G(x) - 6x\right)' = G'(x+1)(x+1)' + G'(x) - 6(x)' =$$
$$= f(x+1) + f(x) - 6$$

Έχω: $G(1) - G(0) = 1 \Rightarrow G(1) = 1 + G(0)$

Έχω: $G(2) - G(1) = 5 \Rightarrow G(2) = 5 + G(1)$

$$\left.\begin{cases} h(0) = G(1) + G(0) \\ h(1) = G(2) + G(1) - 6 \overset{\substack{G(1)=1+G(0) \\ G(2)=5+G(1)}}{=} 1 + G(0) + 5 + G(1) - 6 = G(1) + G(0) \end{cases}\right\} \Rightarrow$$

$h(0) = h(1)$

$$\text{Έχω:} \left\{\begin{array}{l} (\mathrm{I})\ \text{Η } h \text{ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα } [0,1] \\ (\mathrm{II})\ \text{Η } h \text{ είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα } (0,1) \\ (\mathrm{III})\ h(0) = h(1) \end{array}\right\}$$

Άρα η συνάρτηση h ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο κλειστό διάστημα $[0,1]$.Οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $h'(\xi_1) = 0$

$$\left.\begin{cases} h'(\xi_1) = 0 \\ \xi_1 \in (0,1) \end{cases}\right\} \Rightarrow \left.\begin{cases} f(\xi_1 + 1) + f(\xi_1) - 6 = 0 \\ \xi_1 \in (0,1) \end{cases}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f(\xi_1 + 1) + f(\xi_1) = 6 \\ \xi_1 \in (0,1) \end{array}\right\}$$

Θέτω: $\xi_2 = \xi_1 + 1$

$$\xi_1 \in (0,1) \Rightarrow 0 < \xi_1 < 1 \Rightarrow 1 < \xi_1 + 1 < 2 \overset{\xi_2 = \xi_1 + 1}{\Longrightarrow} 1 < \xi_2 < 2$$

Έχω: $\xi_2 = \xi_1 + 1 \Rightarrow \xi_2 - \xi_1 = 1$

Έχω: $f(\xi_1 + 1) + f(\xi_1) = 6 \overset{\xi_2 = \xi_1 + 1}{\Longrightarrow} f(\xi_2) + f(\xi_1) = 6$

(IV) Θεωρώ την συνάρτηση $H(x) = 3\int_0^x f(t)\,dt + 2x - 21, x \in [0,2]$

Επειδή η f είναι συνεχής θα είναι και συνεχής στο διαστήματα $[0,x]$ με $x \in [0,2]$.Συνεπώς η συνάρτηση $\int_0^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0,2]$.Συνεπώς η συνάρτηση $\int_0^x f(t)dt$ είναι συνεχής στο $[0,2]$ ως παραγωγίσιμη

Η $\sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta$ $2x-21$ $\varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota$ $\sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma$ $\sigma\tau o$ $[0,2]$ $\omega\varsigma$ $\pi o\lambda\upsilon\omega\nu\upsilon\mu\iota\kappa\acute{\eta}$.Άρα η συνάρτηση H είναι συνεχής στο $[0,2]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων

$$H(0)=3\int_0^0 f(t)\,dt+2\bullet 0-21=-21<0$$

$$H(2)=3\int_0^2 f(t)\,dt+2\bullet 2-21=3\left(\int_0^1 f(t)\,dt+\int_1^2 f(t)\,dt\right)-17\overset{\substack{\int_0^1 f(t)dt=1\\ \int_1^2 f(t)dt=5}}{=}$$

$$=3(1+5)-17=3\bullet 6-17=18-17=1>0$$

$$\left.\begin{cases}H(0)<0\\ H(2)>0\end{cases}\right\}\Rightarrow H(0)H(2)<0$$

$$\text{Έχω}:\left.\begin{cases}(\mathrm{I})\ \text{Η συνάρτηση } H \text{ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα } [0,2]\\ (\mathrm{II})\ H(0)H(2)<0\end{cases}\right\}$$

Οπότε η συνάρτηση H ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος του Bolzano στο κλειστό διάστημα $[0,2]$.Οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho\in(0,2)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $H(\rho)=0$

$$\left.\begin{cases}H(\rho)=0\\ \rho\in(0,2)\end{cases}\right\}\Rightarrow\left.\begin{cases}3\int_0^\rho f(t)\,dt+2\rho-21=0\\ \rho\in(0,2)\end{cases}\right\}\Rightarrow\left.\begin{cases}3\int_0^\rho f(t)\,dt=-21+2\rho\\ \rho\in(0,2)\end{cases}\right\}$$

5.

Έστω οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(0)=2e$, οι οποίες ικανοποιούν την σχέση: $2f(x)+f(1-y)+g(x)-g(y)=2e^x+e^y+3$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ (1)

(I) Να αποδείξετε ότι:

$f(x)=2e^x-e^{1-x}+1$ και $g(x)=-2e^x+2e^{1-x}+2$

(II) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις f,g και $f-g$

(III) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f,C_g των συναρτήσεων f,g αντιστοιχούν σε ένα ακριβώς κοινό σημείο

(IV) Να λύσετε την ανίσωση: $4e^{x^2-2x}<4e^{x-2}+3e^{-x^2+2x+1}-3e^{-x+3}$

$\left(I\right)\Theta\acute{\varepsilon}\tau\omega\ y=x\ \sigma\tau\eta\nu\ \sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\eta\ \left(1\right):$

$$2f\left(x\right)+f\left(1-x\right)+\cancel{g\left(x\right)}-\cancel{g\left(x\right)}=2e^{x}+e^{x}+3\Rightarrow$$

$$2f\left(x\right)+f\left(1-x\right)=3e^{x}+3\left(2\right)$$

$\Sigma\tau\eta\nu\ \sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\eta\ \left(2\right)\ \acute{o}\pi o\upsilon\ x\ \theta\acute{\varepsilon}\tau\omega\ \tau o\ 1-x:$

$$2f\left(1-x\right)+f\left(1-\left(1-x\right)\right)=3e^{1-x}+3\Leftrightarrow 2f\left(1-x\right)+f\left(1-1+x\right)=3e^{1-x}+3$$

$$\Leftrightarrow 2f\left(1-x\right)+f\left(x\right)=3e^{1-x}+3\left(3\right)$$

$\mathrm{A}\pi o\ \tau\iota\varsigma\ \sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\varepsilon\iota\varsigma\ \left(2\right),\left(3\right)\ \acute{\varepsilon}\chi\omega\ \tau o\ \sigma\acute{\upsilon}\sigma\tau\eta\mu\alpha:$

$$\left\{\begin{array}{l}2f\left(x\right)+f\left(1-x\right)=3e^{x}+3\\2f\left(1-x\right)+f\left(x\right)=3e^{1-x}+3\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}-2\left(2f\left(x\right)+f\left(1-x\right)\right)=-2\left(3e^{x}+3\right)\\2f\left(1-x\right)+f\left(x\right)=3e^{1-x}+3\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}-4f\left(x\right)-2f\left(1-x\right)=-6e^{x}-6\\2f\left(1-x\right)+f\left(x\right)=3e^{1-x}+3\end{array}\right\}\left(+\right)$$

$$-4f\left(x\right)-\cancel{2f\left(1-x\right)}+\cancel{2f\left(1-x\right)}+f\left(x\right)=-6e^{x}-6+3e^{1-x}+3\Leftrightarrow$$

$$-3f\left(x\right)=-6e^{x}+3e^{1-x}-3\Leftrightarrow -3f\left(x\right)=-3\left(2e^{x}-e^{1-x}+1\right)\Leftrightarrow$$

$$f\left(x\right)=2e^{x}-e^{1-x}+1$$

$\Theta\acute{\varepsilon}\tau\omega\ y=0\ \sigma\tau\eta\nu\ \sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\eta\ \left(1\right):$

$$2f(x)+f(1)+g(x)-g(0)=2e^x+e^0+3 \overset{\substack{g(0)=2e \\ f(x)=2e^x-e^{1-x}+1 \\ f(1)=2e-e^0+1=2e}}{\Longleftrightarrow}$$

$$2\left(2e^x-e^{1-x}+1\right)+\cancel{2e}+g(x)-\cancel{2e}=2e^x+4 \Leftrightarrow$$

$$4e^x-2e^{1-x}+2+g(x)=2e^x+4 \Leftrightarrow$$

$$g(x)=2e^x+4-4e^x+2e^{1-x}-2 \Leftrightarrow$$

$$g(x)=-2e^x+2e^{1-x}+2$$

$$(II)\ f'(x)=\left(2e^x-e^{1-x}+1\right)'=2\left(e^x\right)'-\left(e^{1-x}\right)'+(1)'=2e^x-e^{1-x}(1-x)'=$$

$$=2e^x+e^{1-x}$$

$$\left.\begin{cases} e^x>0 \\ e^{1-x}>0 \end{cases}\right\} \Rightarrow \left.\begin{cases} 2e^x>0 \\ e^{1-x}>0 \end{cases}\right\} \overset{(+)}{\Longrightarrow} 2e^x+e^{1-x}>0 \Rightarrow f'(x)>0$$

Επειδή $f'(x)>0$ *για κάθε* $x\in\mathbb{R}$ *η* f *είναι γνησίως αύξουσα*

Συνεπώς η f *δεν έχει ακρότατα*

$$g'(x)=\left(-2e^x+2e^{1-x}+2\right)'=-2\left(e^x\right)'+\left(e^{1-x}\right)'+(2)'=-2e^x+e^{1-x}(1-x)'=$$

$$=-2e^x-e^{1-x}$$

$$\left.\begin{cases} e^x>0 \\ e^{1-x}>0 \end{cases}\right\} \Rightarrow \left.\begin{cases} -2e^x<0 \\ -e^{1-x}<0 \end{cases}\right\} \overset{(+)}{\Longrightarrow} -2e^x-e^{1-x}<0 \Rightarrow g'(x)<0$$

Επειδή $g'(x)>0$ *για κάθε* $x\in\mathbb{R}$ *η* g *είναι γνησίως αύξουσα*

Συνεπώς η g *δεν έχει ακρότατα*

Θεωρώ την συνάρτηση $h(x)=(f-g)(x)=f(x)-g(x), x\in\mathbb{R}$

$$x_1<x_2 \overset{\substack{f\uparrow\mathbb{R} \\ \wedge \\ g\downarrow\mathbb{R}}}{\Longrightarrow} \left.\begin{cases} f(x_1)<f(x_2) \\ g(x_1)>g(x_2) \end{cases}\right\} \Rightarrow \left.\begin{cases} f(x_1)<f(x_2) \\ -g(x_1)<-g(x_2) \end{cases}\right\} \overset{(+)}{\Longrightarrow}$$

$$f(x_1)-g(x_1)<f(x_2)-g(x_2) \Rightarrow (f-g)(x_1)<(f-g)(x_2) \Rightarrow h(x_1)<h(x_2)$$

Συνεπώς η συνάρτηση h *είναι γνησίως αύξουσα.*

Συνεπώς η h *δεν έχει ακρότατα*

(III) *Έστω* $\mathrm{A}(x_0,y_0)$ *κοινό σημείο των* C_f, C_g. Τότε *θα έχω*:

$$\mathrm{A}(x_0,y_0)\in C_f\cap C_g \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \mathrm{A}(x_0,y_0)\in C_f \\ \mathrm{A}(x_0,y_0)\in C_g \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y_0=f(x_0) \\ y_0=g(x_0) \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y_0=f(x_0) \\ f(x_0)=g(x_0) \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} y_0=f(x_0) \\ f(x_0)-g(x_0)=0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y_0=f(x_0) \\ (f-g)(x_0)=0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y_0=f(x_0) \\ h(x_0)=0 \end{Bmatrix}$$

$$h(x)=f(x)-g(x) \overset{\substack{f(x)=2e^x-e^{1-x}+1 \\ g(x)=-2e^x+2e^{1-x}+2}}{=} 2e^x-e^{1-x}+1-\left(-2e^x+2e^{1-x}+2\right)=$$

$$=2e^x-e^{1-x}+1+2e^x-2e^{1-x}-2=4e^x-3e^{1-x}-1$$

$$h(x)=4e^x-3e^{1-x}-1, x\in\mathbb{R}$$

$$h(0)=4e^0-3e-1=3-3e=3(1-e)<0\left(\Gamma\iota\alpha\tau\acute{\iota}:1<e\Leftrightarrow 1-e<0\right)$$

$$h(1)=4e-3e^0-1=4e-4=4(e-1)>0\left(\Gamma\iota\alpha\tau\acute{\iota}:e>1\Leftrightarrow e-1>0\right)$$

$$\begin{Bmatrix} h(0)>0 \\ h(1)<0 \end{Bmatrix} \Rightarrow h(0)h(1)<0$$

Έχω: $\begin{Bmatrix} \text{(I) Η } \textit{συνάρτηση h είναι συνεχής στο } [0,1] \textit{ ως άθροισμα συνεχών} \\ \textit{συναρτήσεων} \\ \text{(II) } h(0)h(1)<0 \end{Bmatrix}$

Οπότε η συνάρτηση h ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος του Bolzano στο κλειστό διάστημα $[0,1]$. *Οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον* $x_0\in(0,1)$ *τέτοιο ώστε* $h(x_0)=0$

$$\begin{Bmatrix} x_0\in(0,1) \\ h(x_0)=0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x_0\in(0,1) \\ (f-g)(x_0)=0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x_0\in(0,1) \\ f(x_0)-g(x_0)=0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x_0\in(0,1) \\ f(x_0)=g(x_0) \end{Bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x_0\in(0,1) \\ f(x_0)=g(x_0) \\ \mathrm{A}(x_0,f(x_0))\in C_f \\ \mathrm{A}(x_0,g(x_0))\in C_g \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x_0\in(0,1) \\ f(x_0)=g(x_0) \\ \mathrm{A}(x_0,f(x_0))\in C_f\cap C_g \end{Bmatrix}$$

Άρα οι γραφικές παραστάσεις C_f, C_g *των συναρτήσεων* f,g *έχουν κοινό σημείο.Θα αποδείξω ότι αυτό το κοινό σημείο είναι μοναδικό*

Έστω Έστω $\mathrm{A}(x_1,y_1)$ *κοινό σημείο των* C_f, C_g *με* $x_1\neq x_0$.*Τότε θα έχω*:

$$\mathrm{A}(x_1,y_1)\in C_f\cap C_g \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \mathrm{A}(x_1,y_1)\in C_f \\ \mathrm{A}(x_1,y_1)\in C_g \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y_1=f(x_1) \\ y_1=g(x_1) \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y_1=f(x_1) \\ f(x_1)=g(x_1) \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} y_1=f(x_1) \\ f(x_1)-g(x_1)=0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y_1=f(x_1) \\ (f-g)(x_1)=0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y_1=f(x_1) \\ h(x_1)=0 \end{Bmatrix}$$

Επειδή η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα θα είναι και "1−1"

$$\textit{Έχω}:\begin{Bmatrix} h(x_0)=0 \\ h(x_1)=0 \end{Bmatrix} \Rightarrow h(x_0)=h(x_1) \xRightarrow{h\text{"1-1"}} x_0=x_1 \ (\textit{Άτοπο})$$

Άρα οι γραφικές παραστάσεις C_f, C_g *των συναρτήσεων* f, g *έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο*

$$(IV)\ h(x)=4e^x-3e^{1-x}-1,\ x\in\mathbb{R}$$

$$4e^{x^2-2x}<4e^{x-2}+3e^{-x^2+2x+1}-3e^{-x+3} \Leftrightarrow 4e^{x^2-2x}-3e^{-x^2+2x+1}<4e^{x-2}-3e^{-x+3} \Leftrightarrow$$

$$4e^{x^2-2x}-3e^{1-\left(x^2-2x\right)}<4e^{x-2}-3e^{1+(-x+2)} \Leftrightarrow 4e^{x^2-2x}-3e^{1-\left(x^2-2x\right)}<4e^{x-2}-3e^{1-(x-2)}$$

$$\Leftrightarrow 4e^{x^2-2x}-3e^{1-\left(x^2-2x\right)}-1<4e^{x-2}-3e^{1-(x-2)}-1 \Leftrightarrow h\left(x^2-2x\right)<h(x-2)$$

$$\overset{h\uparrow\mathbb{R}}{\Longleftrightarrow} x^2-2x<x-2 \Leftrightarrow x(x-2)-(x-2)<0 \Leftrightarrow (x-2)(x-1)<0\ (4)$$

$$\text{Θεωρώ την εξίσωση}:(x-2)(x-1)=0 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x-2=0 \\ \text{ή} \\ x-1=0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x=2 \\ \text{ή} \\ x=1 \end{Bmatrix}$$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$(x-1)(x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$(4) \Leftrightarrow x\in(1,2)$$

6.

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ *τέτοια, ώστε για κάθε* $x>0$ *ισχύει* $xf'(x)=\dfrac{x+1}{e^{f(x)}+1}$ *και* $f(1)=0$
(I) Να *αποδείξετε ότι η συνάρτηση* $g(x)=e^{x}+x$ *είναι* "1−1"
(II) Να *αποδείξετε ότι* $f(x)=\ln x$ *για κάθε* $x>0$
(III) Να *μελετήσετε την συνάρτηση* $h(x)=\dfrac{f(x)-1}{x}$ *ως προς την μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της*
(IV) Να *λύσετε την εξίσωση* $\left(\dfrac{\eta\mu x}{e}\right)^{\sigma\upsilon\nu x}=\left(\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{e}\right)^{\eta\mu x}$ *αν* $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$
(V) Να *εξεταστεί αν η h ως προς την κυρτότητα και να δείξετε ότι κάθε* x_1,x_2 *με* $x_2>x_1>0$ *ισχύει* $\dfrac{h(x_2)-h(x_2)}{x_2-x_1}\geq-\dfrac{1}{2e^{5}}$

$(I)\; g'(x)=\left(e^{x}+x\right)'=\left(e^{x}\right)'+\left(x\right)'=e^{x}+1$

$$\underline{\left.\begin{cases}e^{x}>0\\ 1>0\end{cases}\right\}(+)}$$

$e^{x}+1>0\Rightarrow g'(x)>0$

Επειδή $g'(x)>0$ *για κάθε* $x\in\mathbb{R}$ *η* g *είναι γνησίως αύξουσα.*

Επειδή *η* g *είναι γνησίως αύξουσα θα είναι* "1−1"

$$(II)\; xf'(x)=\frac{x+1}{e^{f(x)}+1}\Leftrightarrow xf'(x)\left(e^{f(x)}+1\right)=x+1\ \overset{\substack{x>0\Rightarrow x\neq0\\ \Delta\iota\alpha\iota\rho\acute{\omega}\ \kappa\alpha\iota\ \tau\alpha\\ \delta\upsilon o\ \mu\acute{\varepsilon}\lambda\eta\ \tau\eta\varsigma\ \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta\varsigma\\ \mu\varepsilon\ \tau o\ x}}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{xf'(x)\left(e^{f(x)}+1\right)}{x}=\frac{x+1}{x}\Leftrightarrow f'(x)\left(e^{f(x)}+1\right)=\frac{x}{x}+\frac{1}{x}\Leftrightarrow$$

$$f'(x)e^{f(x)}+f'(x)=1+\frac{1}{x}\Leftrightarrow\left(e^{f(x)}+f(x)\right)'=\left(x+\ln x\right)'$$

$\text{Επειδή} \left(e^{f(x)}+f(x)\right)'=(x+\ln x)'$ *για κάθε* $x\in(0,+\infty)$ *υπάρχει* $c\in\mathbb{R}$ *τέτοιο ώστε να ισχύει*:

$e^{f(x)}+f(x)=x+\ln x+c$, *για κάθε* $x\in(0,+\infty)$

Αν $x=1$ *θα έχω*:

$$e^{f(1)}+f(1)=1+\ln 1+c \overset{\substack{f(1)=0\\ \ln 1=0}}{\Longleftrightarrow} e^{0}+0=1+0+c \Leftrightarrow 1=1+c \Leftrightarrow c=0$$

Ο*πότε θα έχω*:

$$e^{f(x)}+f(x)=x+\ln x \overset{e^{\ln\theta}=\theta,\theta>0}{\Longleftrightarrow} e^{f(x)}+f(x)=e^{\ln x}+\ln x \Leftrightarrow g\left(f(x)\right)=g(\ln x)$$

$$\overset{\text{Η } g \text{ είναι "1–1"}}{\Longleftrightarrow} f(x)=\ln x$$

$$(III)\ h(x)=\frac{f(x)-1}{x}=\frac{\ln x-1}{x},\ x>0$$

$$h'(x)=\left(\frac{\ln x-1}{x}\right)'=\frac{(\ln x-1)'x-(\ln x-1)(x)'}{x^2}=\frac{\frac{1}{x}x-\ln x+1}{x^2}=\frac{2-\ln x}{x^2}$$

$$\begin{Bmatrix} h'(x)\geq 0 \\ x>0 \end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix} \frac{2-\ln x}{x^2}\geq 0 \\ x>0 \end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix} 2-\ln x\geq 0 \\ x>0 \end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix} -\ln x\geq -2 \\ x>0 \end{Bmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} \ln x\leq 2 \\ x>0 \end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix} \ln x\leq \ln e^2 \\ x>0 \end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix} x\leq e^2 \\ x>0 \end{Bmatrix}\Leftrightarrow 0<x\leq e^2 \Leftrightarrow x\in\left(0,e^2\right]$$

$$\begin{Bmatrix} h'(x)<0 \\ x>0 \end{Bmatrix}\Leftrightarrow x>e^2 \Leftrightarrow x\in\left(e^2,+\infty\right)$$

$$\text{Έχω}:\begin{Bmatrix} (\mathrm{I})\, h'(x)>0 \text{ για κάθε } x\in\left(0,e^2\right) \\ (\mathrm{II})\, \text{Η } h \text{ είναι συνεχής στο συνεχής στο σημείο } x_0=e^2 \end{Bmatrix}$$

Ο*πότε η* h *είναι γνησίως αύξουσα στο* $\left(0,e^2\right]$

$$\text{Έχω}:\begin{Bmatrix} (\mathrm{I})\, h'(x)<0 \text{ για κάθε } x\in\left(e^2,+\infty\right) \\ (\mathrm{II})\, \text{Η } h \text{ είναι συνεχής στο συνεχής στο σημείο } x_0=e^2 \end{Bmatrix}$$

Ο*πότε η* h *είναι γνησίως φθίνουσα* $\left[e^2,+\infty\right)$

$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x - 1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} \lim_{x\to 0^+} (\ln x - 1) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\left(\lim_{x\to 0^+} \ln x - 1\right) \overset{\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty}{=}$$

$$= (+\infty)(-\infty - 1) = (+\infty)(-\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} h(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x - 1}{x} \overset{\substack{\lim_{x\to+\infty} x = \lim_{x\to+\infty} (\ln x - 1) = -\infty \\ \text{Κανόνας του de'L Hospital}}}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{(\ln x - 1)'}{(x)'} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$h\left(e^2\right) = \frac{\ln e^2 - 1}{e^2} = \frac{2\ln e - 1}{e^2} \overset{\ln e = 1}{=} \frac{2-1}{e^2} = \frac{1}{e^2}$$

$$\textit{Έχω}: \left\{ \begin{array}{l} (\mathrm{I})\, H\ h \textit{ είναι γνησίως αύξουσα στο } \left(0, e^2\right] \\ (\mathrm{II})\, \mathrm{H}\ h \textit{ είναι συνεχής στο συνεχής στο } \left(0, e^2\right] \end{array} \right\}$$

$$\mathrm{O}\textit{πότε}: h\left(\left(0, e^2\right]\right) = \left(\lim_{x\to 0^+} h(x), h\left(e^2\right)\right] = \left(-\infty, \frac{1}{e^2}\right]$$

$$\textit{Έχω}: \left\{ \begin{array}{l} (\mathrm{I})\, H\ h \textit{ είναι γνησίως φθίνουσα στο } \left(e^2, +\infty\right) \\ (\mathrm{II})\, \mathrm{H}\ h \textit{ είναι συνεχής στο συνεχής στο } \left(e^2, +\infty\right) \end{array} \right\}$$

$$\mathrm{O}\textit{πότε}: h\left(\left(e^2, +\infty\right)\right) = \left(\lim_{x\to +\infty} h(x), \lim_{x\to e^{2+}} h(x)\right) = \left(0, \frac{1}{e^2}\right)$$

$$\textit{Έχω}: D_f = \left(0, e^2\right] \cup \left(e^2, +\infty\right), \left(0, e^2\right] \cap \left(e^2, +\infty\right) = \varnothing$$

$$f\left(D_f\right) = f\left(\left(0, e^2\right] \cup \left(e^2, +\infty\right)\right) \overset{f(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}) = f(\mathrm{A}) \cup f(\mathrm{B}),\, \mathrm{A}\cap\mathrm{B} = \varnothing}{=} f\left(\left(0, e^2\right]\right) \cup f\left(\left(e^2, +\infty\right)\right) =$$

$$\left(-\infty, \frac{1}{e^2}\right] \cup \left(0, \frac{1}{e^2}\right) = \left(-\infty, \frac{1}{e^2}\right]$$

$$(IV) \left\{ \begin{array}{l} \left(\dfrac{\eta\mu x}{e}\right)^{\sigma\upsilon\nu x} = \left(\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{e}\right)^{\eta\mu x} \\ x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \ln\left(\dfrac{\eta\mu x}{e}\right)^{\sigma\upsilon\nu x} = \ln\left(\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{e}\right)^{\eta\mu x} \\ x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma\upsilon\nu x \ln\left(\dfrac{\eta\mu x}{e}\right) = \eta\mu x \ln\left(\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{e}\right) \\ x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{cases}\sigma\upsilon\nu x\left(\ln\eta\mu x-\ln e\right)=\eta\mu x\left(\ln\sigma\upsilon\nu x-\ln e\right)\\ x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\end{cases}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{cases}\sigma\upsilon\nu x\left(\ln\eta\mu x-1\right)=\eta\mu x\left(\ln\sigma\upsilon\nu x-1\right)\\ x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\end{cases}\right\}\xLeftrightarrow{x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow\sigma\upsilon\nu x,\eta\mu x\neq 0}$$

$$\left.\begin{cases}\dfrac{\cancel{\sigma\upsilon\nu x}\left(\ln\eta\mu x-1\right)}{\cancel{\sigma\upsilon\nu x}\,\eta\mu x}=\dfrac{\cancel{\eta\mu x}\left(\ln\sigma\upsilon\nu x-1\right)}{\sigma\upsilon\nu x\,\cancel{\eta\mu x}}\\ x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\end{cases}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{cases}\dfrac{\ln\eta\mu x-1}{\eta\mu x}=\dfrac{\ln\sigma\upsilon\nu x-1}{\sigma\upsilon\nu x}\\ x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\end{cases}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{cases}h\left(\eta\mu x\right)=h\left(\sigma\upsilon\nu x\right)\\ x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\end{cases}\right\}\xLeftrightarrow{h\uparrow\left(0,e^2\right]}\left.\begin{cases}\eta\mu x=\sigma\upsilon\nu x\\ x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\end{cases}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{cases}\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x=0\\ x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\end{cases}\right\}(1)$$

$$\left[\begin{array}{l} x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}0<\eta\mu x<1\\0<\sigma\upsilon\nu x<1\end{array}\right\}\Rightarrow\eta\mu x,\sigma\upsilon\nu x\in\left(0,1\right)\subseteq\left(0,e^2\right]\Rightarrow\\ \eta\mu x,\sigma\upsilon\nu x\in\left(0,e^2\right]\end{array}\right]$$

$\Theta\varepsilon\omega\rho\acute{\omega}\ \tau\eta\nu\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ t\left(x\right)=\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x, x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$t'\left(x\right)=\left(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x\right)'=\sigma\upsilon\nu x-\left(-\eta\mu x\right)=\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x$$

$$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow\left.\begin{cases}\eta\mu x>0\\ \sigma\upsilon\nu x>0\end{cases}\right\}\xRightarrow{(+)}\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x>0\Rightarrow t'\left(x\right)>0$$

$\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ t'\left(x\right)>0\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\eta\ t\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \gamma\nu\eta\sigma\acute{\iota}\omega\varsigma\ \alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha.$

$\mathrm{E}\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ t\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \gamma\nu\eta\sigma\acute{\iota}\omega\varsigma\ \alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha\ \theta\alpha\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ "1-1"$

$$(1)\Leftrightarrow\left.\begin{cases}\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x=0\\ x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\end{cases}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{cases}t\left(x\right)=0\\ x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\end{cases}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{cases}t\left(x\right)=t\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\\ x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\end{cases}\right\}\xLeftrightarrow{t\ "1-1"}x=\dfrac{\pi}{4}$$

$$(III)\ h'(x)=\frac{2-\ln x}{x^2},\ x>0$$

$$h''(x)=\left(\frac{2-\ln x}{x^2}\right)'=\frac{(2-\ln x)'x^2-(2-\ln x)\left(x^2\right)'}{x^2}=$$

$$\frac{-\frac{1}{x}x^2-(2-\ln x)2x}{x^2}=\frac{-x-2x(2-\ln x)}{x^2}=\frac{-\cancel{x}\left[1+2(2-\ln x)\right]}{x^{\cancel{2}}}=$$

$$=\frac{-(1+4-2\ln x)}{x}=\frac{-(5-2\ln x)}{x}=\frac{2\ln x-5}{x}$$

$$\begin{Bmatrix} h''(x)\geq 0 \\ x>0 \end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix} \dfrac{2\ln x-5}{x}\geq 0 \\ x>0 \end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix} 2\ln x-5\geq 0 \\ x>0 \end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix} 2\ln x\geq 5 \\ x>0 \end{Bmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} \ln x\geq \dfrac{5}{2} \\ x>0 \end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix} \ln x\geq \ln e^{\frac{5}{2}} \\ x>0 \end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix} x\geq e^{\frac{5}{2}} \\ x>0 \end{Bmatrix}\Leftrightarrow x\in\left[e^{\frac{5}{2}},+\infty\right)$$

$$\begin{Bmatrix} h''(x)<0 \\ x>0 \end{Bmatrix}\Leftrightarrow x\in\left(0,e^{\frac{5}{2}}\right)$$

$$\text{Επειδή}\begin{Bmatrix} (\text{I})\, h''(x)<0\ \text{για κάθε}\ x\in\left(0,e^{\frac{5}{2}}\right) \\ (\text{I})\,\text{Η}\ h\ \text{είναι συνεχής στο}\ \ x_0=\dfrac{5}{2} \end{Bmatrix}\eta\ f\ \text{είναι}$$

$$\text{κοίλη στο}\left(0,e^{\frac{5}{2}}\right]$$

$$\text{Επειδή}\begin{Bmatrix} (\text{I})\, h''(x)>0\ \text{για κάθε}\ x\in\left(e^{\frac{5}{2}},+\infty\right) \\ (\text{I})\,\text{Η}\ h\ \text{είναι συνεχής στο}\ \ x_0=\dfrac{5}{2} \end{Bmatrix}\eta\ f\ \text{είναι}$$

$$\text{κυρτή στο}\left[e^{\frac{5}{2}},+\infty\right)$$

$$\text{Έχω}:\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\, h''(x)<0 \text{ για κάθε } x\in\left(0,e^{\frac{5}{2}}\right)\\ (\mathrm{II})\, h''(x)>0 \text{ για κάθε } x\in\left(e^{\frac{5}{2}},+\infty\right)\\ (\mathrm{III})\, \text{Η } h' \text{ είναι συνεχής στο συνεχής στο σημείο } x_0=e^{\frac{5}{2}}\end{array}\right\}$$

Άρα η συνάρτηση h' *έχει ελάχιστη τιμή στην θέση* $x_0=e^{\frac{5}{2}}$ *τον αριθμό*

$$h'\left(e^{\frac{5}{2}}\right)=\frac{2-\frac{5}{2}}{\left(e^{\frac{5}{2}}\right)^2}=\frac{\frac{4}{2}-\frac{5}{2}}{e^5}=-\frac{1}{2e^5}$$

Ο*πότε για κάθε* $x>0$ *θα ισχύει*:

$$\left\{\begin{array}{l}h'(x)\geq h'\left(e^{\frac{5}{2}}\right)\\ x>0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}h'(x)\geq -\frac{1}{2e^5}\\ x>0\end{array}\right\}$$

Ο*πότε για κάθε* $x>0$ *θα ισχύει*:

$$\left\{\begin{array}{l}h'(x)\geq h'\left(e^{\frac{5}{2}}\right)\\ x>0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}h'(x)\geq -\frac{1}{2e^5}\\ x>0\end{array}\right\}$$

$$\text{Έχω}:\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\,\text{Η } h \text{ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα } [x_1,x_2] \text{ ως πηλίκο}\\ \text{συνεχών συναρτήσεων}\\ (\mathrm{II})\,\text{Η } h \text{ είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα } (x_1,x_2) \text{ ως}\\ \text{παραγωγίσιμων συναρτήσεων}\end{array}\right\}$$

Ο*πότε η συνάρτηση h ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος της μέσης τιμής στο κλειστό διάστημα* $[x_1,x_2]$.Ο*πότε υπάρχει ένα τουλάχιστον* $\xi\in(x_1,x_2)$ *τέτοιο ώστε να ισχύει* $h'(\xi)=\dfrac{h(x_2)-h(x_2)}{x_2-x_1}$

$$h'(\xi)\geq-\frac{1}{2e^5}\Rightarrow\frac{h(x_2)-h(x_2)}{x_2-x_1}\geq-\frac{1}{2e^5}$$

7.

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:

$$\frac{xf(x)+1}{1+f^2(x)}=\frac{1}{2} \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} \text{ και } f(0)=1$$

(I) *Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}, x\in\mathbb{R}$*

(II) *Να αποδείξετε ότι η f είναι "1−1"*

(III) *Να λύσετε την εξίσωση:*

$$\sqrt{x^6+1}+x^3+e^x-1=\sqrt{e^{2x}-2e^x+2}$$

$$(I)\ \frac{xf(x)+1}{1+f^2(x)}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2\left[xf(x)+1\right]=1+f^2(x)\Leftrightarrow 2xf(x)+2=1+f^2(x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^2(x)-2xf(x)=1 \overset{\substack{\text{Προσθέτω και στα}\\ \text{δυο μέλη το } x^2}}{\Longleftrightarrow} \underbrace{f^2(x)-2\bullet f(x)\bullet x+x^2}_{a^2-2\bullet a\bullet \beta+\beta^2=(\alpha-\beta)^2}=x^2+1\Leftrightarrow$$

$$\left(f(x)-x\right)^2=x^2+1\Leftrightarrow\sqrt{\left(f(x)-x\right)^2}=\sqrt{x^2+1}\overset{\sqrt{a^2}=|a|}{\Longleftrightarrow}\left|f(x)-x\right|=\sqrt{x^2+1}$$

Θεωρώ την συνάρτηση $g(x)=f(x)-x$. Τότε θα έχω:

$$|g(x)|=\sqrt{x^2+1}$$

Έχω: $x^2\ge 0\Rightarrow x^2+1\ge 1>0\Rightarrow x^2+1>0\Rightarrow\sqrt{x^2+1}>0\Rightarrow|g(x)|>0\Rightarrow g(x)\neq 0$

$$\text{Έχω:}\begin{cases}(\mathrm{I})\ \text{Η } g \text{ είναι συνεχής στο } (-\infty,\infty) \text{ ως διαφορά συνεχών}\\ \text{συναρτήσεων}\\ (\mathrm{II})\ g(x)\neq 0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}\end{cases}$$

Οπότε $g(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ή $g(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Έχω: $g(0)=f(0)-0\overset{f(0)=1}{=}1>0$

Επειδή $g(0)>0$ θα έχω $g(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Οπότε: $|g(x)|=\sqrt{x^2+1}\overset{g(x)>0}{\Longleftrightarrow}g(x)=\sqrt{x^2+1}\overset{g(x)=f(x)-x}{\Longleftrightarrow}f(x)-x=\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow$

$$f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$$

$$(II)\ f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow x_1+\sqrt{x_1^2+1}=x_2+\sqrt{x_2^2+1}\Leftrightarrow \sqrt{x_1^2+1}-\sqrt{x_2^2+1}+x_1-x_2=0$$

$$\left.\begin{cases}x_1^2\ge 0\\ x_2^2\ge 0\end{cases}\right\}\Rightarrow\left.\begin{cases}x_1^2+1\ge 1>0\\ x_2^2+1\ge 1>0\end{cases}\right\}\Rightarrow\left.\begin{cases}x_1^2+1>0\\ x_2^2+1>0\end{cases}\right\}\Rightarrow\left.\begin{cases}\sqrt{x_1^2+1}>0\\ \sqrt{x_2^2+1}>0\end{cases}\right\}\overset{(+)}{\Longrightarrow}$$

$$\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}>0\Rightarrow\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}\ne 0$$

$$\text{Οπότε}: f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow\sqrt{x_1^2+1}-\sqrt{x_2^2+1}+x_1-x_2$$

$$\overset{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}\ne 0}{\Longleftrightarrow}\ \frac{\left(\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}\right)\left(\sqrt{x_1^2+1}-\sqrt{x_2^2+1}\right)}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}+x_1-x_2=0$$

$$\frac{\left(\sqrt{x_1^2+1}\right)^2-\left(\sqrt{x_2^2+1}\right)^2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}+x_1-x_2=0\Leftrightarrow\frac{x_1^2-x_2^2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}+x_1-x_2=0\Leftrightarrow$$

$$\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}+x_1-x_2=0\Leftrightarrow(x_1-x_2)\left(\frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}+1\right)=0$$

$$1>0\Rightarrow\left.\begin{cases}x_1^2+1>x_1^2\\ x_2^2+1>x_2^2\end{cases}\right\}\Rightarrow\left.\begin{cases}\sqrt{x_1^2+1}>\sqrt{x_1^2}\\ \sqrt{x_2^2+1}>\sqrt{x_2^2}\end{cases}\right\}\overset{\sqrt{\alpha^2}=|\alpha|}{\Longrightarrow}\left.\begin{cases}\sqrt{x_1^2+1}>|x_1|\\ \sqrt{x_2^2+1}>|x_2|\end{cases}\right\}\overset{(+)}{\Longrightarrow}$$

$$\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}>|x_1|+|x_2|\Rightarrow|x_1|+|x_2|<\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}$$

Απο την τριγωνική ανισότητα έχω:

$$|x_1+x_2|\le|x_1|+|x_2|<\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}\Rightarrow|x_1+x_2|<\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}$$

$$\overset{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}>0}{\Longrightarrow}\ \frac{|x_1+x_2|}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}<\frac{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}\Rightarrow\left|\frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}\right|<1$$

$$\overset{|x|\le\theta,\theta\ge 0\Leftrightarrow-\theta\le x\le\theta}{\Longrightarrow}\ -1<\frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}<1\Rightarrow\frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}>-1\Rightarrow$$

$$\frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}+1>0\Rightarrow\frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}+1\ne 0$$

$$\text{Έχω}:(x_1-x_2)\left(\frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}+1\right)=0\ \overset{\frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}+1\ne 0}{\Longleftrightarrow}\ x_1-x_2=0\Leftrightarrow x_1=x_2$$

Συνεπώς η συνάρτηση f είναι "1−1"

$$(III)\sqrt{x^6+1}+x^3+e^x-1=\sqrt{e^{2x}-2e^x+2}\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{\left(x^3\right)^2+1}+x^3=\sqrt{\underbrace{1^2-2\bullet e^x\bullet 1+\left(e^x\right)^2}_{a^2-2\bullet a\bullet\beta+\beta^2=(\alpha-\beta)^2}+1}-e^x+1\Leftrightarrow f\left(x^3\right)=\sqrt{\left(1-e^x\right)^2+1}+\left(1-e^x\right)$$

$$\Leftrightarrow f\left(x^3\right)=f\left(1-e^x\right)\overset{f\,\text{"1–1"}}{\Longleftrightarrow}x^3=1-e^x\Leftrightarrow x^3+e^x-1=0$$

$\Theta\varepsilon\omega\rho\acute{\omega}\ \tau\eta\nu\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ h(t)=t^3+e^t-t,t\in\mathbb{R}$

$$t_1<t_2\Rightarrow\begin{cases}t_1^{\ 3}<t_2^{\ 3}\\ e^{t_1}<e^{t_2}\end{cases}\overset{(+)}{\Longrightarrow}t_1^{\ 3}+e^{t_1}<t_2^{\ 3}+e^{t_2}\Rightarrow t_1^{\ 3}+e^{t_1}-1<t_2^{\ 3}+e^{t_2}-1\Rightarrow h(t_1)<h(t_2)$$

$\Sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\acute{\omega}\varsigma\ \eta\ h\uparrow\ o\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota$ "1–1"

$\acute{E}\chi\omega: h(0)=0^3+e^0-1=1-1=0$

$$x^3+e^x-1=0\Leftrightarrow h(x)=h(0)\overset{h\,\text{"1–1"}}{\Longleftrightarrow}x=0$$

8.

$\Delta\acute{\iota}\nu\varepsilon\tau\alpha\iota\ \eta\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f(x)=\begin{cases}e^x+x, x\le 0\\ 1-2x-\ln(x+1), x>0\end{cases}$

(I) Να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής

(II) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία

(III) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

(IV) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δυο ρίζες ετερόσημες x_1,x_2 με $x_1<x_2$

(V) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{f(\alpha)-1}{x-1}+\dfrac{f(\beta)-1}{x-2}=210$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1,2)$ με $\alpha,\beta>0$

(VI) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x+f(x)=\eta\mu x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (x_1,x_2), όπου x_1,x_2 είναι οι ρίζες του ερωτήματος (IV)

(V) Να βρείτε τις θετικές λύσεις της εξίσωσης:

$$2^{x+1}+2x+\ln\left(2^x+x-1\right)=6+\ln 2$$

$$(I)\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(e^x+x\right)=e^0+0\overset{a^0=1,a\neq 0}{=}1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left[1-2x-\ln(x+1)\right]=1-2\bullet 0-\ln(0+1)=1-\ln 1\overset{\ln 1=0}{=}1-0=1$$

$$f(0)=e^0+0=1+0=1$$

Επειδή $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$ *η συνάρτηση* f *είναι συνεχής στο σημείο* $x_0=0$

Η *συνάρτηση* e^x *είναι συνεχής στο* $(-\infty,0)$ *ως εκθετική*

Η *συνάρτηση* x *είναι συνεχής στο* $(-\infty,0)$ *ως πολυωνυμική*

Η *συνάρτηση* f *είναι συνεχής στο* $(-\infty,0)$ *ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων*.Η *συνάρτηση* $\ln(x+1)$ *είναι συνεχής στο* $(0,+\infty)$ *ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων* $x+1$ *και* $\ln x$.Η *συνάρτηση* $1-2x$ *είναι συνεχής στο* $(0,+\infty)$ *ως πολυωνυμική*

Οπότε η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διαστήματα $(-\infty,0),(0,+\infty)$ και στο σημείο $x_0=0$ θα είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$

$$(II)\ \text{Αν}:\left\{\begin{matrix} x_1,x_2\in(-\infty,0] \\ x_1<x_2 \end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix} x_1,x_2\in(-\infty,0] \\ e^{x_1}<e^{x_2} \\ x_1<x_2 \end{matrix}\right\}\overset{(+)}{\Longrightarrow}\left\{\begin{matrix} x_1,x_2\in(-\infty,0] \\ x_1+e^{x_1}<x_2+e^{x_2} \end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$f(x_1)<f(x_2)$$

Συνεπώς $f\underset{\wedge}{\uparrow}(-\infty,0]$

$$\text{Αν}:\left\{\begin{matrix} x_1,x_2\in(0,+\infty) \\ x_1<x_2 \end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix} x_1,x_2\in(0,+\infty) \\ -2x_1>-2x_2 \\ x_1+1<x_2+1 \end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix} x_1,x_2\in(0,+\infty) \\ -2x_1>-2x_2 \\ \ln(x_1+1)<\ln(x_2+1) \end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{matrix} x_1,x_2\in(0,+\infty) \\ -2x_1>-2x_2 \\ -\ln(x_1+1)>\ln(x_2+1) \end{matrix}\right\}\overset{(+)}{\Longrightarrow}\left\{\begin{matrix} x_1,x_2\in(0,+\infty) \\ -2x_1-\ln(x_1+1)>-2x_2-\ln(x_2+1) \end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{matrix} x_1,x_2\in(0,+\infty) \\ 1-2x_1-\ln(x_1+1)>1-2x_2-\ln(x_2+1) \end{matrix}\right\}\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$$

Συνεπώς $f\overset{\vee}{\downarrow}(0,+\infty)$

$$(III)\ f(x)=\begin{cases} e^x+x, x\le 0 \\ 1-2x-\ln(x+1), x>0 \end{cases}$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}a^x=\begin{cases} +\infty, a\in(0,1) \\ 0, a\in(1,+\infty) \end{cases}}$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(e^x+x\right)=\lim_{x\to-\infty}e^x+\lim_{x\to-\infty}x\overset{e>1}{=}0-\infty=-\infty$$

$$\text{Έχω}:\left\{\begin{matrix} \text{(I)Η } f \text{ είναι συνεχής στο διάστημα } (-\infty,0] \\ \text{(II) } f\underset{\wedge}{\uparrow}(-\infty,0] \end{matrix}\right\}$$

$$\text{Οπότε}: f\left((-\infty,0]\right)=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),f(0)\right]=(-\infty,1]$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} 0, a\in(0,1) \\ +\infty, a\in(1,+\infty) \end{cases}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(1-2x-\ln(x+1)\right) = 1-2\lim_{x\to+\infty} e^x - \lim_{x\to+\infty}\ln(x+1) \overset{e>1}{=}$$
$$=1-2(+\infty)-\infty = 1-\infty-\infty = -\infty$$

$$Έχω: \lim_{x\to+\infty}\ln(x+1) \underset{x\to+\infty\Rightarrow t\to+\infty}{\overset{Θέτω\ t=x+1}{=}} \lim_{t\to+\infty}\ln t = +\infty$$

$$Έχω: \begin{cases} (\mathrm{I})\ \mathrm{H}\ f\ είναι\ συνεχής\ στο\ διάστημα\ (0,+\infty) \\ (\mathrm{II})\ f \overset{\vee}{\downarrow} (0,+\infty) \end{cases}$$

$$\mathrm{O}πότε: f\left((0,+\infty)\right) = \left(\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to 0^+} f(x)\right) = (-\infty,1)$$

$$f(\mathbb{R}) = f\left((-\infty,0]\cup(0,+\infty)\right) \overset{(-\infty,0]\cap(0,+\infty)=\varnothing}{=} f\left((-\infty,0]\right)\cup f\left((0,+\infty)\right) =$$
$$(-\infty,1]\cup(-\infty,1) = (-\infty,1]$$

(IV)

Επειδή $f\left((-\infty,0]\right) = (-\infty,1]$ *και* $0\in(-\infty,1]$ *υπάρχει* $x_1\in(-\infty,0]$ *τέτοιο ώστε* $f(x_1)=0$. *Έστω* $x_1=0$. Τ*ότε θα έχω*:

$f(x_1) = f(0) = 1 \neq 0$ (*Άτοπο*)

Σ*υνεπώς* $x_1\in(-\infty,0]$ *και* $x_1\neq 0$. Ο*πότε* $x_1\in(-\infty,0)$

Άρα υπάρχει $x_1\in(-\infty,0)$ *τέτοιο ώστε* $f(x_1)=0$

Ε*πειδή* $f\left((0,+\infty)\right) = (-\infty,1)$ *και* $0\in(-\infty,1)$ *υπάρχει* $x_2\in(0,+\infty)$ *τέτοιο ώστε* $f(x_2)=0$

Έχω: $x_1 < 0 < x_2 \Rightarrow x_1 < x_2$

(V) Ε*πειδή* $\alpha,\beta\in(0,+\infty)$ *και* $f\left((0,+\infty)\right) = (-\infty,1)$ *θα έχω*:

$f(\alpha)<1,\ f(\beta)<1$

Θ*εωρώ την συνάρτηση* $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *με τύπο*

$$g(x) = (x-2)\left(f(\alpha)-1\right) + (x-1)\left(f(\beta)-1\right) - 210(x-1)(x-2)$$

$$g(1) = -\left(f(\alpha)-1\right) = 1-f(\alpha) > 0$$

$$\left(Έχω: f(\alpha)<1 \Leftrightarrow 1>f(\alpha) \Leftrightarrow 1-f(\alpha)>0\right)$$

$g(2) = f(\beta) - 1 < 0$

$\left(Έχω: f(\beta) < 1 \Leftrightarrow f(\beta) - 1 < 0 \right)$

$$\left.\begin{cases} g(1) > 0 \\ g(2) < 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow g(1)g(2) < 0$$

$$Έχω: \left\{ \begin{array}{l} (\mathrm{I})\,\text{Η συνάρτηση } g \text{ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα} \\ [1,2] \text{ ως πολυωνυμική} \\ (\mathrm{II})\, g(1)g(2) < 0 \end{array} \right\}$$

Οπότε η συνάρτηση g ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος του Bolzano στο κλειστό διάστημα $[1,2]$. Συνεπώς υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $g(\xi) = 0$

$$\left.\begin{cases} g(\xi) = 0 \\ \xi \in (1,2) \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} (\xi - 2)\big(f(\alpha) - 1\big) + (\xi - 1)\big(f(\beta) - 1\big) - 210(\xi - 1)(\xi - 2) = 0 \\ 1 < \xi < 2, \xi \neq 1, \xi \neq 2 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{cases} (\xi - 2)\big(f(\alpha) - 1\big) + (\xi - 1)\big(f(\beta) - 1\big) = 210(\xi - 1)(\xi - 2) \\ 1 < \xi < 2, \xi - 1 \neq 0, \xi - 2 \neq 0 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{cases} (\xi - 2)\big(f(\alpha) - 1\big) + (\xi - 1)\big(f(\beta) - 1\big) = 210(\xi - 1)(\xi - 2) \\ 1 < \xi < 2, (\xi - 1)(\xi - 2) \neq 0 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{cases} \dfrac{(\xi - 2)\big(f(\alpha) - 1\big) + (\xi - 1)\big(f(\beta) - 1\big)}{(\xi - 1)(\xi - 2)} = \dfrac{210\cancel{(\xi - 1)(\xi - 2)}}{\cancel{(\xi - 1)(\xi - 2)}} \\ \xi \in (1,2) \end{cases}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{cases} \dfrac{\cancel{(\xi - 2)}\big(f(\alpha) - 1\big)}{(\xi - 1)\cancel{(\xi - 2)}} + \dfrac{\cancel{(\xi - 1)}\big(f(\beta) - 1\big)}{\cancel{(\xi - 1)}(\xi - 2)} = 210 \\ \xi \in (1,2) \end{cases}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{cases} \dfrac{f(\alpha) - 1}{\xi - 1} + \dfrac{f(\beta) - 1}{\xi - 2} = 210 \\ \xi \in (1,2) \end{cases}\right\}$$

(VI) Θεωρώ την συνάρτηση $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $h(x)=x+f(x)-\eta\mu x$

Τότε θα έχω:

$$h(x_1)=x_1+f(x_1)-\eta\mu x_1 \overset{f(x_1)=0}{=} x_1+0-\eta\mu x_1 = x_1-\eta\mu x_1$$

$$h(x_2)=x_2+f(x_2)-\eta\mu x_2 \overset{f(x_2)=0}{=} x_2+0-\eta\mu x_2 = x_2-\eta\mu x_2$$

<u>Γνωρίζω ότι αν $\alpha\neq 0$ ισχύει $|\eta\mu\alpha|<|\alpha|$</u>

Επειδή $x_1<0$ θα έχω:

$$|\eta\mu x_1|<|x_1| \overset{\substack{\text{Επειδή } x_1<0 \text{ θα}\\ \text{έχω}: |x_1|=-x_1}}{\Leftrightarrow} |\eta\mu x_1|<-x_1 \overset{|x|<\theta,\theta>0\Leftrightarrow-\theta<x<\theta}{\Leftrightarrow} -(-x_1)<\eta\mu x_1<-x_1 \Leftrightarrow$$

$$x_1<\eta\mu x_1<-x_1 \Rightarrow x_1<\eta\mu x_1 \Rightarrow x_1-\eta\mu x_1<0 \Rightarrow h(x_1)<0$$

Επειδή $x_2>0$ θα έχω:

$$|\eta\mu x_2|<|x_2| \overset{\substack{\text{Επειδή } x_2>0 \text{ θα}\\ \text{έχω}: |x_2|=x_2}}{\Leftrightarrow} |\eta\mu x_2|<x_2 \overset{|x|<\theta,\theta>0\Leftrightarrow-\theta<x<\theta}{\Leftrightarrow} -x_2<\eta\mu x_2<x_2 \Rightarrow$$

$$x_2>\eta\mu x_2 \Rightarrow x_2-\eta\mu x_2>0 \Rightarrow h(x_2)>0$$

$$\left.\begin{cases} h(x_1)<0 \\ h(x_2)>0 \end{cases}\right\} \Rightarrow h(x_1)h(x_2)<0$$

$$\text{Έχω}:\left\{\begin{array}{l} (\mathrm{I})\text{Η συνάρτηση } h \text{ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα} \\ [x_1,x_2] \text{ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων} \\ (\mathrm{II})\, h(x_1)h(x_2)<0 \end{array}\right\}$$

Οπότε η συνάρτηση h ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος του Bolzano στο κλειστό διάστημα $[x_1,x_2]$.Συνεπώς υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε $h(x_0)=0$

$$\left\{\begin{array}{l} h(x_0)=0 \\ x_0\in(x_1,x_2) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_0+f(x_0)-\eta\mu x_0=0 \\ x_0\in(x_1,x_2) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_0+f(x_0)=\eta\mu x_0 \\ x_0\in(x_1,x_2) \end{array}\right\}$$

$$(V)\left\{\begin{array}{l} 2^{x+1}+2x+\ln\left(2^x+x-1\right)=6+\ln 2 \\ x>0 \end{array}\right\} \overset{2^x+x-1=\left(2^x+x-2\right)+1}{\Leftrightarrow}$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2^{x+1}+2x+\ln\left[\left(2^x+x-2\right)+1\right]=6+\ln 2 \\ x>0 \end{array}\right\} \overset{\text{Προσθέτω και στα δυο μέλη το } -4}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \underbrace{22^x+2x-4}_{\text{Βγάζω κοινό παράγοντα το} 2} + \ln\left[\left(2^x+x-2\right)+1\right] = -4+6+\ln 2 \\ x>0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2\left(2^x+x-2\right)+\ln\left[\left(2^x+x-2\right)+1\right] = 2+\ln 2 \\ x>0 \end{array}\right\} \overset{\text{Αλλάζω τα πρόσημα και στα δυο μέλη της ισότητα}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left\{\begin{array}{l} -2\left(2^x+x-2\right)-\ln\left[\left(2^x+x-2\right)+1\right] = -2\bullet 1-\ln\left(1+1\right) \\ x>0 \end{array}\right\} \overset{\text{Προσθέτω και στα δυο μέλη της ισότητας την μονάδα για να εμφανιστεί η συνάρτηση } f}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left\{\begin{array}{l} 1-2\left(2^x+x-2\right)-\ln\left[\left(2^x+x-2\right)+1\right] = 1-2\bullet 1-\ln\left(1+1\right) \\ x>0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} f\left(2^x+x-2\right) = f\left(1\right) \\ x>0 \end{array}\right\} \overset{f \underset{\vee}{\downarrow} (0,+\infty)}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{l} 2^x+x-2=1 \\ x>0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2^x+x-3=0 \\ x>0 \end{array}\right\}$$

Θεωρώ την συνάρτηση $\mathrm{H}:\left(0,+\infty\right)\to\mathbb{R}$ *με τύπο* $\mathrm{H}\left(x\right)=2^x+x-3$

$$x_1<x_2 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2^{x_1}<2^{x_2} \\ x_1<x_2 \\ x_1,x_2\in\left(0,+\infty\right) \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Longrightarrow} \left\{\begin{array}{l} 2^{x_1}+x_1<2^{x_2}+x_2 \\ x_1,x_2\in\left(0,+\infty\right) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2^{x_1}+x_1-3<2^{x_2}+x_2-3 \\ x_1,x_2\in\left(0,+\infty\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{H}\left(x_1\right)<\mathrm{H}\left(x_2\right)$$

Συνεπώς $\mathrm{H}\underset{\wedge}{\uparrow}\left(0,+\infty\right)$.*Άρα η* Η *είναι* "1−1"

$$\mathrm{H}\left(1\right)=2^1+1-3=3-3=0$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2^x+x-3=0 \\ x>0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \mathrm{H}\left(x\right)=\mathrm{H}\left(1\right) \\ x>0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1 \\ x>0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x=1$$

9.

$\acute{E}\sigma\tau\omega\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}\ \acute{o}\pi o\upsilon\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota$

$x^2 f''(x)-xf'(x)+f(x)=0\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x>0\ \mu\varepsilon\ f'(1)=2\ \kappa\alpha\iota\ f(1)=1$

(I) Να αποδειχθεί ότι: $f(x)=x\ln x+x, x>0$

(II) Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα και την κυρτότητα

(III) Να βρεθεί το σύνολο τιμών καθώς και το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x)=-\dfrac{1}{e^2}$

(IV) Να αποδείξετε ότι $\displaystyle\int_1^e \frac{f(f(x))}{x^2}dx<e+1$

(V) Να υπολογίσετε το εμβαδό χωρίου που περκλείεται ανάμεσα στην γραφική παράσταση της f, την κατακόρυφη ευθεία $x=\dfrac{1}{e^2}$ και την ευθεία $y=x$

$$x^2 f''(x)-xf'(x)+f(x)=0\Leftrightarrow x^2 f''(x)=xf'(x)-f(x)\overset{x\neq 0}{\Longleftrightarrow}$$

$$f''(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}\Leftrightarrow f''(x)=\frac{f'(x)x-f(x)(x)'}{x^2}\Leftrightarrow (f'(x))'=\left(\frac{f(x)}{x}\right)'$$

Επειδή $(f'(x))'=\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ θα υπάρχει $c_1\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε για κάθε $x\in(0,+\infty)$ να ισχύει:

$$f'(x)=\frac{f(x)}{x}+c_1\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in(0,+\infty)$$

Αν $x=1$ θα έχω:

$$f'(1)=\frac{f(1)}{1}+c_1\overset{\substack{f'(1)=2\\ f(1)=1}}{\Longleftrightarrow}2=\frac{1}{1}+c_1\Leftrightarrow c_1=2-1\Leftrightarrow c_1=1$$

Οπότε θα έχω: $f'(x)=\dfrac{f(x)}{x}+1$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

$$f'(x)=\frac{f(x)}{x}+1 \Leftrightarrow xf'(x)=x\left(\frac{f(x)}{x}+1\right) \Leftrightarrow xf'(x)=x\frac{f(x)}{x}+x \Leftrightarrow$$

$$xf'(x)=f(x)+x \Leftrightarrow xf'(x)-f(x)=x \overset{x\neq 0}{\Longleftrightarrow} \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{x}{x^2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{f'(x)x-f(x)(x)'}{x^2}=\frac{1}{x} \overset{(\ln x)'=\frac{1}{x},x>0}{\Longleftrightarrow} \left(\frac{f(x)}{x}\right)'=(\ln x)'$$

$\text{Επειδή} \left(\frac{f(x)}{x}\right)'=(\ln x)'$ *για κάθε* $x\in(0,+\infty)$ *θα υπάρχει* $c_2\in\mathbb{R}$ *τέτοιο ώστε για κάθε* $x\in(0,+\infty)$ *να ισχύει* :

$$\frac{f(x)}{x}=\ln x+c_2 \text{ για κάθε } x\in(0,+\infty)$$

Αν $x=1$ *θα έχω* :

$$\frac{f(1)}{1}=\ln 1+c_2 \overset{\substack{f(1)=1\\ \ln 1=0}}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{1}+0+c_2 \Leftrightarrow c_2=1$$

Οπότε *θα έχω* :

$$\left\{\begin{matrix}\frac{f(x)}{x}=\ln x+1\\ \text{Για κάθε } x\in(0,+\infty)\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}f(x)=x(\ln x+1)\\ \text{Για κάθε } x\in(0,+\infty)\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}f(x)=x\ln x+x\\ \text{Για κάθε } x\in(0,+\infty)\end{matrix}\right\}$$

$$(\text{II})\ f'(x)=(x\ln x+x)'=(x\ln x)'+(x)'=(x)'\ln x+x(\ln x)'+1=\ln x+x\frac{1}{x}+1=$$

$$=\ln x+1+1=\ln x+2$$

$$f'(x)=\ln x+2, x>0$$

$$f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}\ln x+2\geq 0\\ x>0\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}\ln x\geq -2\\ x>0\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}\ln x\geq -2\bullet 1\\ x>0\end{matrix}\right\} \overset{\log_a a=1, 0<a\neq 1}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left\{\begin{matrix}\ln x\geq -2\bullet \ln e\\ x>0\end{matrix}\right\} \overset{\kappa\log_a\theta=\log_a\theta^\kappa, 0<a\neq 1,\theta>0}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{matrix}\ln x\geq \ln e^{-2}\\ x>0\end{matrix}\right\} \overset{\left\{\begin{smallmatrix}\log_a\theta_1\geq\log_a\theta_2\\ \alpha>1\end{smallmatrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{smallmatrix}\theta_1\geq\theta_2\\ \alpha>1\end{smallmatrix}\right\}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{matrix}x\geq e^{-2}\\ x>0\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$x\geq e^{-2}$$

$\text{Οπότε}:$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > e^{-2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^{-2}$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < e^{-2}$

x	0		e^{-2}		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	
			min		

$$\mathit{Έχω}:\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\,\mathrm{H}\ f\ \textit{είναι συνεχής στο}\left(0,e^{-2}\right]\\(\mathrm{II})\ f'(x)<0\ \textit{για κάθε}\ x\in\left(0,e^{-2}\right)\end{array}\right\}\text{Οπότε}: f\overset{\vee}{\downarrow}\left(0,e^{-2}\right]$$

$$\mathit{Έχω}:\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\,\mathrm{H}\ f\ \textit{είναι συνεχής στο}\left[e^{-2},+\infty\right)\\(\mathrm{II})\ f'(x)<0\ \textit{για κάθε}\ x\in\left(e^{-2},+\infty\right)\end{array}\right\}\text{Οπότε}: f\underset{\wedge}{\uparrow}\left[e^{-2},+\infty\right)$$

$$\mathit{Έχω}:\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\,\mathrm{H}\ f\ \textit{είναι συνεχής στο}\left(0,+\infty\right)\\(\mathrm{II})\,f'(x)<0\ \textit{για κάθε}\ x\in\left(0,e^{-2}\right)\\(\mathrm{III})\ f'(x)<0\ \textit{για κάθε}\ x\in\left(e^{-2},+\infty\right)\end{array}\right\}$$

Οπότε *η συνάρτηση* f *έχει ελάχιστο στην θέση* $x_0 = e^{-2}$ *τον αριθμό*

$$f\left(e^{-2}\right) = e^{-2}\ln e^{-2} + e^{-2} \overset{\kappa\log_a\theta=\log_a\theta^{\kappa},\,0<a\neq 1,\,\theta>0}{=} e^{-2}(-2)\ln e + e^{-2} \overset{\ln e=1}{=} e^{-2}(-2)\bullet 1 + e^{-2} =$$

$$= -2e^{-2} + e^{-2} = -e^{-2}$$

Αν $x \in (0,+\infty)$ θα έχω:

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)' = (\ln x + 2)' = (\ln x)' + (2)' = \frac{1}{x}$$

$$x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow f''(x) > 0$$

Επειδή $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$ η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω

$$(III)\left\{\begin{array}{l} (\mathrm{I})\,\text{Η } f \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο } \left(0,e^{-2}\right] \\ (\mathrm{II})\,\text{Η } f \text{ είναι συνεχής στο } \left(0,e^{-2}\right] \end{array}\right\}$$

Οπότε $f\left(\left(0,e^{-2}\right]\right) = \left[f\left(e^{-2}\right), \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\right) = \left[-\frac{1}{e^2}, 0\right)$

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\substack{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty,\ \lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty \\ \text{Κανόνας του De L'Hospital}}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{x} =$$

$$= -\lim_{x\to 0^+} x = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x\ln x + x) = \lim_{x\to 0^+} x\ln x + \lim_{x\to 0^+} x = 0$$

$$\left\{\begin{array}{l} (\mathrm{I})\,\text{Η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο} \left[e^{-2},+\infty\right) \\ (\mathrm{II})\,\text{Η } f \text{ είναι συνεχής στο } \left[e^{-2},+\infty\right) \end{array}\right\}$$

Οπότε $f\left(\left[e^{-2},+\infty\right)\right) = \left[f\left(e^{-2}\right), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right) = \left[-\frac{1}{e^2}, +\infty\right)$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} (x\ln x + x) = \lim_{x\to +\infty} x \lim_{x\to +\infty} \ln x + \lim_{x\to +\infty} x = +\infty(+\infty) + \infty = +\infty$$

$$f(0.+\infty) = f\left(\left(0,e^{-2}\right]\cup\left[e^{-2},+\infty\right)\right) = f\left(\left(0,e^{-2}\right]\right)\cup f\left(\left[e^{-2},+\infty\right)\right) =$$

$$\left[-\frac{1}{e^2},0\right)\cup\left[-\frac{1}{e^2},+\infty\right) = \left[-\frac{1}{e^2},+\infty\right)$$

$$e > 1 \Rightarrow ee^2 > 1\bullet e^2 \Rightarrow e^3 > e^2 \quad \overset{\substack{\text{Αν } \alpha\beta>0 \text{ τότε ισχύει η ισοδυναμια:} \\ \alpha>\beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}<\frac{1}{\beta}}}{\Rightarrow} \quad \frac{1}{e^3} < \frac{1}{e^2} \Rightarrow -\frac{1}{e^3} > -\frac{1}{e^2}$$

Οπότε $-\frac{1}{e^2} < -\frac{1}{e^3} < 0 \Rightarrow -\frac{1}{e^3} \in \left[-\frac{1}{e^{-2}}, 0\right)$

$\text{Επειδή } f\left(\left(0,e^{-2}\right]\right)=\left[-\frac{1}{e^{2}},0\right),-\frac{1}{e^{3}}\in\left[-\frac{1}{e^{-2}},0\right) \text{ και } f\underset{\vee}{\downarrow}\left(0,e^{-2}\right] \text{ υπάρχει}$

$\text{μοναδικό } x_1\in\left(0,e^{-2}\right] \text{ τέτοιο ώστε } f\left(x_1\right)=-\frac{1}{e^{3}}$

$\text{Επειδή } f\left(\left[e^{-2},+\infty\right)\right)=\left[-\frac{1}{e^{2}},+\infty\right),-\frac{1}{e^{3}}\in\left[-\frac{1}{e^{-2}},+\infty\right) \text{ και } f\underset{\wedge}{\uparrow}\left[e^{-2},+\infty\right) \text{ υπάρχει}$

$\text{μοναδικό } x_2\in\left(0,e^{-2}\right] \text{ τέτοιο ώστε } f\left(x_2\right)=-\frac{1}{e^{3}}$

$(IV)\text{ Έχω}: \boxed{\ln x\le x-1, x\in(0,+\infty)}$

$$\begin{Bmatrix}\ln x\le x-1\\ x>0\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}x\ln x\le x(x-1)\\ x>0\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}x\ln x\le x(x-1)\\ x>0\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}x\ln x\le x^2-x\\ x>0\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\underbrace{x\ln x+x}_{f(x)}\le x^2\\ x>0\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}f(x)\le x^2\\ x>0\end{Bmatrix}$$

$\text{Επειδή } f\underset{\wedge}{\uparrow}\left[e^{-2},+\infty\right) \text{ και } [1,e]\subseteq\left[e^{-2},+\infty\right) \text{ θα έχω } f\underset{\wedge}{\uparrow}[1,e]$

$\text{Αν } x\in[1,e] \text{ θα έχω}:$

$$\begin{Bmatrix}f(x)\le x^2\\ x\in[1,e]\end{Bmatrix}\overset{f\underset{\wedge}{\uparrow}[1,e]}{\Longrightarrow}\begin{Bmatrix}f\left(f(x)\right)\le f\left(x^2\right)\\ x\in[1,e]\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}f\left(f(x)\right)\le f\left(x^2\right)\\ x\in[1,e]\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}f\left(f(x)\right)\le x^2\ln x^2+x^2\\ x\in[1,e]\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}f\left(f(x)\right)\le x^2 2\ln x+x^2\\ x\in[1,e]\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}f\left(f(x)\right)\le x^2\left(2\ln x+1\right)\\ x\in[1,e]\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}\dfrac{f\left(f(x)\right)}{x^2}\le 2\ln x+1\\ x\in[1,e]\end{Bmatrix}$$

$\text{Επειδή } \ln x=x-1, x\in(0,+\infty) \text{ ισχύει μόνο για } x=1 \text{ και η ισότητα}$

$\dfrac{f\left(f(x)\right)}{x^2}\le 2\ln x+1 \text{ ισχύει για } x=1. \text{ Οπότε θα έχω}:$

$$\int_1^e\frac{f\left(f(x)\right)}{x^2}dx<\int_1^e\left(2\ln x+1\right)dx\Leftrightarrow\int_1^e\frac{f\left(f(x)\right)}{x^2}dx<2\int_1^e\ln x dx+\int_1^e dx\Leftrightarrow$$

$$\int_1^e\frac{f\left(f(x)\right)}{x^2}dx<2\int_1^e(x)'\ln x dx+[x]_1^e\Leftrightarrow$$

$$\int_1^e \frac{f(f(x))}{x^2}dx < 2\left(\left[x\ln x\right]_1^e - \int_1^e x(\ln x)' dx\right) + e - 1 \Leftrightarrow$$

$$\int_1^e \frac{f(f(x))}{x^2}dx < 2\left(e\ln e - \ln 1 - \left[x\right]_1^e\right) + e - 1 \Leftrightarrow$$

$$\int_1^e \frac{f(f(x))}{x^2}dx < 2\left(e - (e-1)\right) + e - 1 \Leftrightarrow$$

$$\int_1^e \frac{f(f(x))}{x^2}dx < 2\left(e - e + 1\right) + e - 1 \Leftrightarrow$$

$$\int_1^e \frac{f(f(x))}{x^2}dx < 2 + e - 1 \Leftrightarrow \int_1^e \frac{f(f(x))}{x^2}dx < e + 1$$

(V) $\Theta\varepsilon\omega\rho\acute{\omega}\ \tau\eta\nu\ \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta$: $\left\{\begin{matrix} f(x) = x \\ x > 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x\ln x + x = x \\ x > 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x\ln x = 0 \\ x > 0 \end{matrix}\right\}$

$$\left\{\begin{matrix} \ln x = 0 \\ x > 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow x = 1$$

$$\mathrm{E} = \int_{\frac{1}{e^2}}^{1} \left| f(x) - x \right| dx = \int_{\frac{1}{e^2}}^{1} \left| x\ln x + x - x \right| dx \int_{\frac{1}{e^2}}^{1} \left| x\ln x \right| dx = \int_{\frac{1}{e^2}}^{1} |x| \left|\ln x\right| dx$$

$$\overset{\substack{x\in\left[\frac{1}{e^2},1\right]\Rightarrow x>0\Rightarrow |x|=x \\ x\in\left[\frac{1}{e^2},1\right]\Rightarrow x\le 1\Rightarrow \ln x\le 0\Rightarrow |\ln x| = -\ln x}}{=} \int_{\frac{1}{e^2}}^{1} x(-\ln x)dx = -\int_{\frac{1}{e^2}}^{1} x\ln x dx \overset{\left(\frac{x^2}{2}\right)'=x}{=} -\int_{\frac{1}{e^2}}^{1} \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln x dx =$$

$$= -\left(\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_{\frac{1}{e^2}}^{1} - \int_{\frac{1}{e^2}}^{1} \frac{x^2}{2}(\ln x)' dx\right) = -\left(\frac{\ln 1}{2} - \frac{\left(e^{-2}\right)^2 \ln e^{-2}}{2} - \int_{\frac{1}{e^2}}^{1} \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx\right) =$$

$$= -\frac{2e^{-4}\ln e}{2} + \int_{\frac{1}{e^2}}^{1} \frac{x}{2}dx = -e^{-4} + \left[\frac{x^2}{4}\right]_{\frac{1}{e^2}}^{1} = -e^{-4} + \frac{1}{4} - \frac{\left(e^{-2}\right)^2}{4} = \frac{1}{4} - \frac{4e^{-4}}{4}\frac{e^{-4}}{4} =$$

$$= \frac{1 - 5e^{-4}}{4} = \frac{1 - \frac{5}{e^4}}{4} = \frac{\frac{e^4}{e^4} - \frac{5}{e^4}}{4} = \frac{\frac{e^4 - 5}{e^4}}{4} = \frac{e^4 - 5}{4e^4}\ \tau.\mu$$

10.

$\Theta\varepsilon\omega\rho o\acute{\upsilon}\mu\varepsilon\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ \mu\varepsilon\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\ \pi\rho\acute{\omega}\tau\eta\ \pi\alpha\rho\acute{\alpha}\gamma\omega\gamma o\ \gamma\iota\alpha$
$\tau\eta\nu\ o\pi o\acute{\iota}\alpha\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}o\upsilon\nu:$

- $f'(x)\neq f(x)\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in\mathbb{R}$
- $\left|f'(1)-f(1)\right|=f'(1)-f(1)$

$(\mathrm{I})\ \mathrm{N}\alpha\ \alpha\pi o\delta\varepsilon\acute{\iota}\xi\varepsilon\tau\varepsilon\ \acute{o}\tau\iota\ f'(x)>f(x)\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in\mathbb{R}$

$(\mathrm{II})\ \mathrm{N}\alpha\ \alpha\pi o\delta\varepsilon\acute{\iota}\xi\varepsilon\tau\varepsilon\ \acute{o}\tau\iota\ \eta\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ h(x)=\dfrac{f(x)}{e^x}\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \gamma\nu\eta\sigma\acute{\iota}\omega\varsigma$
$\alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha\ \sigma\tau o\ \mathbb{R}.$

$(\mathrm{III})\ \mathrm{N}\alpha\ \alpha\pi o\delta\varepsilon\acute{\iota}\xi\varepsilon\tau\varepsilon\ \acute{o}\tau\iota\ f(1)+f(3)<\dfrac{f(2)+f(4)}{e}$

$(IV)\ \mathrm{A}\nu\ \alpha,\beta\ \pi\rho\alpha\gamma\mu\alpha\tau\iota\kappa o\acute{\iota}\ \alpha\rho\iota\theta\mu o\acute{\iota}\ \gamma\iota\alpha\ \tau o\upsilon\varsigma\ o\pi o\acute{\iota}o\upsilon\varsigma\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota$
$f(\alpha)<e^{\alpha-\beta}f(\beta)\ \nu\alpha\ \beta\rho\varepsilon\acute{\iota}\tau\varepsilon\ \tau o\ \pi\lambda\acute{\eta}\theta o\varsigma\ \tau\omega\nu\ \rho\iota\zeta\acute{\omega}\nu\ \tau\eta\varsigma\ \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta\varsigma$
$(\alpha-\beta)x^2+2021x+\dfrac{f(2)+f(4)}{e}-f(1)-f(3)=0$

$(\mathrm{I})\ \Theta\varepsilon\omega\rho\acute{\omega}\ \tau\eta\nu\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ g(x)=f'(x)-f(x).\ \mathrm{T}\acute{o}\tau\varepsilon\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$

$$\begin{Bmatrix} f'(x)\neq f(x) \\ \Gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in\mathbb{R}\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix} f'(x)-f(x)\neq 0 \\ \Gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in\mathbb{R}\end{Bmatrix}\overset{g(x)=f'(x)-f(x)}{\Longleftrightarrow}\begin{Bmatrix} g(x)\neq 0 \\ \Gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in\mathbb{R}\end{Bmatrix}$$

$\mathrm{H}\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ g(x)=f'(x)-f(x),x\in\mathbb{R}$

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathrm{A}\nu:\begin{Bmatrix}(\mathrm{I})\ \mathrm{H}\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ \delta\iota\acute{\alpha}\sigma\tau\eta\mu\alpha\ \Delta \\ (\mathrm{II})\ \mathrm{H}\ f(x)\neq 0\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in\Delta \\ (\mathrm{III})\ \mathrm{T}o\ \sigma\acute{\upsilon}\nu o\lambda o\ \Delta\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \delta\iota\acute{\alpha}\sigma\tau\eta\mu\alpha\end{Bmatrix} \\ \mathrm{T}\acute{o}\tau\varepsilon\ f(x)>0\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in\Delta\ \acute{\eta}\ f(x)<0\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in\Delta\end{array}}$$

$$\acute{E}\chi\omega:\begin{Bmatrix}(\mathrm{I})\ \mathrm{H}\ g\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ (-\infty,+\infty)\begin{pmatrix}\Omega\varsigma\ \delta\iota\alpha\varphi o\rho\acute{\alpha}\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\omega}\nu \\ \sigma\upsilon\nu\alpha\rho\tau\acute{\eta}\sigma\varepsilon\omega\nu\end{pmatrix} \\ (\mathrm{II})\ \mathrm{H}\ g(x)\neq 0\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in(-\infty,+\infty)\end{Bmatrix}$$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ g(x)>0\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in(-\infty,+\infty)\ \acute{\eta}\ g(x)<0\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in(-\infty,+\infty)$

$$\boxed{|\alpha| = \alpha \Leftrightarrow \alpha \geq 0}$$

$$\left|f'(1) - f(1)\right| = f'(1) - f(1) \overset{g(x)=f'(x)-f(x)}{\Longleftrightarrow} |g(1)| = g(1) \Leftrightarrow g(1) \geq 0 \, (1)$$

$$f'(x) \neq f(x) \overset{\Theta\acute{\varepsilon}\tau\omega: x=1}{\Longrightarrow} f'(1) \neq f(1) \Rightarrow f'(1) - f(1) \neq 0 \overset{g(x)=f'(x)-f(x)}{\Longrightarrow} g(1) \neq 0 \, (2)$$

Απο τις σχέσεις $(1),(2)$ θα έχω:

$$\left.\begin{cases} g(1) \geq 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow g(1) > 0$$

Επειδή $g(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, +\infty)$ ή $g(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, +\infty)$ και $g(1) > 0$ προκύπτει ότι $g(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, +\infty)$

$$\left.\begin{cases} g(x) > 0 \\ \Gamma\iota\alpha \ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon \ x \in (-\infty, +\infty) \end{cases}\right\} \overset{g(x)=f'(x)-f(x)}{\Longleftrightarrow} \left.\begin{cases} f'(x) - f(x) > 0 \\ \Gamma\iota\alpha \ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon \ x \in (-\infty, +\infty) \end{cases}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{cases} f'(x) > f(x) \\ \Gamma\iota\alpha \ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon \ x \in (-\infty, +\infty) \end{cases}\right\}$$

$$(\mathrm{II}) \; h'(x) = \left[\frac{f(x)}{e^x}\right]' \overset{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, g(x)\neq 0}{=} \frac{f'(x)e^x - f(x)\left(e^x\right)'}{\left(e^x\right)^2} =$$

$$\frac{f'(x)e^x - f(x)e^x}{e^{2x}} = \frac{\cancel{e^x}\left[f'(x) - f(x)\right]}{\cancel{e^x}e^x} = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x}$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχω:

$$\left.\begin{cases} f'(x) > f(x) \\ e^x > 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow \left.\begin{cases} f'(x) - f(x) > 0 \\ e^x > 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow \frac{f'(x) - f(x)}{e^x} > 0 \Rightarrow h'(x) > 0$$

Επειδή $h'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα

$$(\mathrm{III}) \left.\begin{cases} 1 < 2 \\ 3 < 4 \end{cases}\right\} \overset{h \uparrow \mathbb{R}}{\Longrightarrow} \left.\begin{cases} h(1) < h(2) \\ h(3) < h(4) \end{cases}\right\} \Rightarrow \left.\begin{cases} \dfrac{f(1)}{e} < \dfrac{f(2)}{e^2} \\ \dfrac{f(3)}{e^3} < \dfrac{f(4)}{e^4} \end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{\dfrac{1}{e}} f(1) < \cancel{\dfrac{1}{e}} \dfrac{f(2)}{e} \\ \cancel{\dfrac{1}{e^3}} f(3) < \cancel{\dfrac{1}{e^3}} \dfrac{f(4)}{e} \end{cases}$$

Αν $\alpha>0$ τότε ισχύει η ισοδυναμία: $\alpha\beta<\alpha\gamma \Leftrightarrow \beta<\gamma$

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} f(1) < \dfrac{f(2)}{e} \\ f(3) < \dfrac{f(4)}{e} \end{cases}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow}$$

$$f(1)+f(3) < \frac{f(2)}{e} + \frac{f(4)}{e} \Rightarrow f(1)+f(3) < \frac{f(2)+f(4)}{e}$$

Διαιρώ και τα δυο μέλη της ανίσωσης με το e^{α} έτσι ώστε στο δεύτερο μέλος να εμφανιστεί το $\frac{f(\alpha)}{e^{\alpha}}=h(\alpha)$

$$(IV)\ f(\alpha) < e^{\alpha-\beta} f(\beta) \overset{\alpha^{x-y}=\frac{\alpha^x}{\alpha^y},\alpha>0,x,y\in\mathbb{R}}{\Longleftrightarrow} f(\alpha) < \frac{e^{\alpha}}{e^{\beta}} f(\beta) \Longleftrightarrow$$

$$\frac{f(\alpha)}{e^{\alpha}} < \frac{\dfrac{e^{\alpha} f(\beta)}{e^{\beta}}}{e^{\alpha}} \Leftrightarrow \frac{f(\alpha)}{e^{\alpha}} < \frac{f(\beta)}{e^{\beta}} \overset{h(x)=\frac{f(x)}{e^x}}{\Longleftrightarrow} h(\alpha) < h(\beta) \overset{h\uparrow\mathbb{R}}{\Longleftrightarrow} \alpha < \beta \Leftrightarrow$$

$$\alpha - \beta < 0$$

$$\frac{f(2)+f(4)}{e} > f(1)+f(3) \Rightarrow \frac{f(2)+f(4)}{e} - f(1) - f(3) > 0$$

Επειδή $\alpha-\beta<0$ θα έχω $\alpha-\beta\neq 0$. Οπότε η εξίσωση

$$(\alpha-\beta)x^2 + 2021x + \frac{f(2)+f(4)}{e} - f(1) - f(3) = 0 \quad (1)$$

είναι δευτέρου βαθμού

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2021^2 - 4(\alpha-\beta)\left[\frac{f(2)+f(4)}{e} - f(1) - f(3)\right]$$

$$\left.\begin{cases} \alpha-\beta<0 \\ \dfrac{f(2)+f(4)}{e} - f(1) - f(3) > 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow (\alpha-\beta)\left[\frac{f(2)+f(4)}{e} - f(1) - f(3)\right] < 0$$

$$-4(\alpha-\beta)\left[\frac{f(2)+f(4)}{e} - f(1) - f(3)\right] > 0$$

$$\underline{\left.\begin{cases} 2021^2 > 0 \\ -4(\alpha-\beta)\left[\dfrac{f(2)+f(4)}{e} - f(1) - f(3)\right] > 0 \end{cases}\right\}(+)}$$

$$2021^2 - 4(\alpha-\beta)\left[\dfrac{f(2)+f(4)}{e} - f(1) - f(3)\right] \Rightarrow \Delta > 0$$

Ε*πειδή* $\Delta > 0$ *η δευτεροβάθμια εξίσωση* (3) *έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες.*

11.

Δ*ίνεται η συνάρτηση* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *που ικανοποιεί την σχέση*
$f^3(x)+f(x)=x+1$
Ν*α αποδείξετε ότι*:
$(I)\ f \underset{\wedge}{\uparrow}$
(II) Η f *είναι συνεχής*
(III) Η f *είναι παραγωγίσιμη*
$(IV)\ f''(-1)=0$
(V) Υ*πάρχει* $\xi\in(-1,0)$ *τέτοιο ώστε* $f'(\xi)=f(0)$
(VI) Η f *στρέφει τα κοίλα προς τα άνω στο* $(-\infty,-1]$ *και τα κοίλα προς τα κάτω στο* $[-1,+\infty)$
$(VII)\ f^2(x)\le 2f'(\xi)(x+1),\ x\in[-1,0]$ *όπου το* ξ *προκύπτει απο το ερώτημα* (V)
$(VIII)\ f(x)<1,\ x\in(-1,0)$

(I) Α*ν* $x_1<x_2$. $\underline{\textit{Έστω } f(x_1)\ge f(x_2)}$

$$f(x_1)\ge f(x_2) \overset{\alpha\ge\beta\Leftrightarrow\alpha^{2\nu+1}\ge\beta^{2\nu+1},\nu\in\mathbb{N}}{\Longrightarrow} \left.\begin{cases} f(x_1)\ge f(x_2) \\ f^3(x_1)\ge f^3(x_2)\end{cases}\right\}\overset{(+)}{\Longrightarrow}$$

$$\underbrace{f(x_1)+f^3(x_1)}_{x_1+1} \ge \underbrace{f(x_2)+f^3(x_2)}_{x_2+1} \Rightarrow x_1+1\ge x_2+1 \Rightarrow x_1\ge x_2\ (\textit{Άτοπο})$$

Ο*πότε* $f(x_1)<f(x_2)$. *Άρα για κάθε* $x_1,x_2\in \mathrm{A}_f$ *με* $x_1<x_2$ *θα έχω* $f(x_1)<f(x_2)$. Σ*υνεπώς* $f\underset{\wedge}{\uparrow}$

$$(II)\begin{cases} f^3(x)+f(x)=x+1 \\ f^3(x_0)+f(x_0)=x_0+1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$f^3(x)+f(x)-\left(f^3(x_0)+f(x_0)\right)=x+1-(x_0+1)\Rightarrow$$

$$f^3(x)-f^3(x_0)+f(x)-f(x_0)=x+1-x_0-1 \overset{\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)\left(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2\right)}{\Longrightarrow}$$

$$\left[f(x)-f(x_0)\right]\left[f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)\right]+f(x)-f(x_0)=x-x_0\Rightarrow$$

$$\left[f(x)-f(x_0)\right]\left[f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+1\right]=x-x_0\Rightarrow$$

$$\left[f(x)-f(x_0)\right]\left[f^2(x)+2f(x)\frac{f(x_0)}{2}+\frac{f^2(x_0)}{4}+\frac{3f^2(x_0)}{4}+1\right]=x-x_0\Rightarrow$$

$$\left[f(x)-f(x_0)\right]\left[\underbrace{f^2(x)+2f(x)\frac{f(x_0)}{2}+\left(\frac{f(x_0)}{2}\right)^2}_{\alpha^2+2\bullet\alpha\bullet\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2}+\frac{3f^2(x_0)}{4}+1\right]=x-x_0\Rightarrow$$

$$\left[f(x)-f(x_0)\right]\left[\left(f(x)+\frac{f(x_0)}{2}\right)^2+\frac{3f^2(x_0)}{4}+1\right]=x-x_0$$

$$\begin{cases} \left(f(x)+\frac{f(x_0)}{2}\right)^2\geq 0 \\ \frac{3f^2(x_0)}{4}\geq 0 \end{cases} \overset{(+)}{\Longrightarrow} \left(f(x)+\frac{f(x_0)}{2}\right)^2+\frac{3f^2(x_0)}{4}\geq 0\Rightarrow$$

$$\left(f(x)+\frac{f(x_0)}{2}\right)^2+\frac{3f^2(x_0)}{4}+1\geq 1>0\Rightarrow\left(f(x)+\frac{f(x_0)}{2}\right)^2+\frac{3f^2(x_0)}{4}+1>0\Rightarrow$$

$$\left(f(x)+\frac{f(x_0)}{2}\right)^2+\frac{3f^2(x_0)}{4}+1\neq 0.\text{Οπότε θα έχω}:$$

$$\left[f(x)-f(x_0)\right]\left[\left(f(x)+\frac{f(x_0)}{2}\right)^2+\frac{3f^2(x_0)}{4}+1\right]=x-x_0 \overset{\left(f(x)+\frac{f(x_0)}{2}\right)^2+\frac{3f^2(x_0)}{4}+1\neq 0}{\Longrightarrow}$$

$$f(x)-f(x_0)=\frac{x-x_0}{\left(f(x)+\frac{f(x_0)}{2}\right)^2+\frac{3f^2(x_0)}{4}+1}(1)$$

$$\left.\begin{cases}\left(f(x)+\dfrac{f(x_0)}{2}\right)^2+\dfrac{3f^2(x_0)}{4}+1\geq 1\\ \left(f(x)+\dfrac{f(x_0)}{2}\right)^2+\dfrac{3f^2(x_0)}{4}+1>0\end{cases}\right\}\xRightarrow{\text{Αν } \alpha\beta>0:\ \alpha\geq\beta\Leftrightarrow\frac{1}{\alpha}\leq\frac{1}{\beta}}$$

$$\frac{1}{\left(f(x)+\dfrac{f(x_0)}{2}\right)^2+\dfrac{3f^2(x_0)}{4}+1}\leq 1\xRightarrow{|x-x_0|\geq 0}$$

$$\frac{|x-x_0|}{\left(f(x)+\dfrac{f(x_0)}{2}\right)^2+\dfrac{3f^2(x_0)}{4}+1}\leq |x-x_0|\Rightarrow$$

$$\left|\frac{x-x_0}{\left(f(x)+\dfrac{f(x_0)}{2}\right)^2+\dfrac{3f^2(x_0)}{4}+1}\right|\leq |x-x_0|\xRightarrow{f(x)-f(x_0)=\frac{x-x_0}{\left(f(x)+\frac{f(x_0)}{2}\right)^2+\frac{3f^2(x_0)}{4}+1}}$$

$$|f(x)-f(x_0)|\leq|x-x_0|\xLeftrightarrow{|x|\leq\theta\Leftrightarrow-\theta\leq x\leq\theta,\theta\geq 0}-|x-x_0|\leq f(x)-f(x_0)\leq|x-x_0|\Leftrightarrow$$

$$f(x_0)-|x-x_0|\leq f(x)\leq f(x_0)+|x-x_0|$$

$$\acute{E}\chi\omega:\begin{cases}(\mathrm{I})\ f(x_0)-|x-x_0|\leq f(x)\leq f(x_0)+|x-x_0|\ \textit{για κάθε}\ x\in\mathbb{R}\\ (\mathrm{II})\ \lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x_0)-|x-x_0|\right]=\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x_0)+|x-x_0|\right]=f(x_0)\end{cases}$$

Οπότε απο το κριτήριο της παρεμβολής θα έχω:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

(III) Αν $x\neq x_0$ απο την σχέση (1) θα έχω:

$$f(x)-f(x_0)=\frac{x-x_0}{\left(f(x)+\dfrac{f(x_0)}{2}\right)^2+\dfrac{3f^2(x_0)}{4}+1}$$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{1}{\left(f(x)+\frac{f(x_0)}{2}\right)^2+\frac{3f^2(x_0)}{4}+1},x\neq x_0$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\left(f(x)+\frac{f(x_0)}{2}\right)^2+\frac{3f^2(x_0)}{4}+1}=$$

$$\frac{1}{\left(\lim_{x\to x_0}f(x)+\frac{f(x_0)}{2}\right)^2+\frac{3f^2(x_0)}{4}+1}\overset{\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)}{=}$$

$$\frac{1}{\left(f(x_0)+\frac{f(x_0)}{2}\right)^2+\frac{3f^2(x_0)}{4}+1}=\frac{1}{\left(\frac{3f(x_0)}{2}\right)^2+\frac{3f^2(x_0)}{4}+1}=$$

$$=\frac{1}{\frac{9f^2(x_0)}{4}+\frac{3f^2(x_0)}{4}+1}=\frac{1}{\frac{12f^2(x_0)}{4}+1}=\frac{1}{3f^2(x_0)+1}$$

Επειδή υπάρχει το $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 και ισχύει:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{1}{3f^2(x_0)+1}$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο τυχαίο σημείο x_0 προκύπτει οτι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει:

$$f'(x)=\frac{1}{3f^2(x)+1}$$

(IV) Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίμων συναρτήσεων

$$\boxed{\left(\frac{1}{F(x)}\right)'=-\frac{F(x)}{F^2(x)},F(x)\neq 0,F:\text{παραγωγίσιμη στο } x}$$

$$f''(x)=\left(f'(x)\right)'=-\frac{\left[3f^2(x)+1\right]'}{\left[3f^2(x)+1\right]^2}=-\frac{3\left[f^2(x)\right]'}{\left[3f^2(x)+1\right]^2}\overset{\left[F^a(x)\right]'=aF^{a-1}(x)F'(x)}{=}$$

$$f''(x)=\left(f'(x)\right)'=-\frac{\left[3f^2(x)+1\right]'}{\left[3f^2(x)+1\right]^2}=-\frac{3\left[f^2(x)\right]'}{\left[3f^2(x)+1\right]^2}\overset{\left[F^a(x)\right]'=aF^{a-1}(x)F'(x)}{=}$$

$$-\frac{3\left[f^2(x)\right]'}{\left[3f^2(x)+1\right]^2}=-\frac{3\bullet 2f(x)f'(x)}{\left[3f^2(x)+1\right]^2}=-\frac{3\bullet 2f(x)f'(x)}{\left[3f^2(x)+1\right]^2}\overset{f'(x)=\frac{1}{3f^2(x)+1}}{=}$$

$$-\frac{6f(x)}{\left[3f^2(x)+1\right]^2}\frac{1}{3f^2(x)+1}=-\frac{6f(x)}{\left[3f^2(x)+1\right]^3}$$

$$\text{Ο}\pi ό\tau\varepsilon: f''(x)=-\frac{6f(x)}{\left[3f^2(x)+1\right]^3}$$

$$f^3(x)+f(x)=x+1\overset{\Theta έ\tau\omega: x=-1}{\Longrightarrow} f^3(-1)+f(-1)=-1+1\Leftrightarrow f(-1)\left[f^2(-1)+1\right]=0$$

$$\left[f^2(-1)\geq 0\Rightarrow f^2(-1)+1\geq 1>0\Rightarrow f^2(-1)+1>0\Rightarrow f^2(-1)+1\neq 0\right]$$

$$\Leftrightarrow f(-1)=0$$

$$f''(-1)=-\frac{6f(-1)}{\left[3f^2(x)+1\right]^3}=-\frac{6\bullet 0}{\left[3f^2(x)+1\right]^3}=0$$

$$(\text{V})\,Έ\chi\omega:\left\{\begin{array}{l}(\text{I})\text{Η } \sigma\upsilon\nu ά\rho\tau\eta\sigma\eta\ f\ \varepsilon ί\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi ή\varsigma\ \sigma\tau o\ \kappa\lambda\varepsilon\iota\sigma\tau ό\\ \delta\iota ά\sigma\tau\eta\mu\alpha\ [-1,0]\\ (\text{II})\text{Η } \sigma\upsilon\nu ά\rho\tau\eta\sigma\eta\ f\ \varepsilon ί\nu\alpha\iota\ \pi\alpha\rho\alpha\gamma\omega\gamma ί\sigma\iota\mu\eta\ \sigma\tau o\ \alpha\nu o\iota\chi\tau ό\\ \delta\iota ά\sigma\tau\eta\mu\alpha\ (-1,0)\end{array}\right\}$$

Οπότε η συνάρτηση f τις προυποθέσεις του θερήματος της Μέσης Τιμής στο κλειστό διάστημα $(-1,0)$.Οπότε υπάχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(-1,0)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f'(\xi)=\dfrac{f(0)-f(-1)}{0-(-1)}$

$$\left\{\begin{array}{l}f'(\xi)=\dfrac{f(0)-f(-1)}{0-(-1)}\\ \xi\in(-1,0)\end{array}\right\}\overset{f(-1)=0}{\Longleftrightarrow}\left\{\begin{array}{l}f'(\xi)=\dfrac{f(0)-0}{1}\\ \xi\in(-1,0)\end{array}\right\}\Leftrightarrow f(0)=f'(\xi)$$

$$(\mathrm{VI})\ f''(x)=\frac{-6f(x)}{\left[3f^2(x)+1\right]^3}$$

$\acute{E}\chi\omega: f^2(x)\geq 0 \Rightarrow 3f^2(x)\geq 0 \Rightarrow 3f^2(x)+1\geq 1>0 \Rightarrow 3f^2(x)+1>0 \Rightarrow$
$\left[3f^2(x)+1\right]^3>0$

$$f''(x)>0 \Leftrightarrow \frac{-6f(x)}{\left[3f^2(x)+1\right]^3}>0 \overset{\left[3f^2(x)+1\right]^3>0}{\Longleftrightarrow} -6f(x)>0 \Leftrightarrow f(x)<0 \overset{f(-1)=0}{\Longleftrightarrow}$$

$$f(x)<f(-1) \overset{f\uparrow}{\Longleftrightarrow} x<-1$$

$$\acute{E}\chi\omega: \left.\begin{cases}(\mathrm{I})\ f''(x)>0 \ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in(-\infty,-1) \\ (\mathrm{II})\ \mathrm{H}\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o\ x_0=-1\end{cases}\right\}$$

Οπότε η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω στο $(-\infty,-1]$

$$f''(x)<0 \Leftrightarrow \frac{-6f(x)}{\left[3f^2(x)+1\right]^3}<0 \overset{\left[3f^2(x)+1\right]^3>0}{\Longleftrightarrow} -6f(x)<0 \Leftrightarrow f(x)>0 \overset{f(-1)=0}{\Longleftrightarrow}$$

$$f(x)>f(-1) \overset{f\uparrow}{\Longleftrightarrow} x>-1$$

$$\acute{E}\chi\omega: \left.\begin{cases}(\mathrm{I})\ f''(x)<0 \ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in(-1,+\infty) \\ (\mathrm{II})\ \mathrm{H}\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o\ x_0=-1\end{cases}\right\}$$

Οπότε η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο $[-1,+\infty)$

$$(VII)\ f^2(x)\leq 2f'(\xi)(x+1) \overset{f'(\xi)=f(0)}{\Longleftrightarrow} f^2(x)\leq 2f(0)(x+1) \Leftrightarrow$$
$$f^2(x)-2f(0)(x+1)\leq 0$$

Θεωρώ την συνάρτηση: $g(x)=f^2(x)-2f(0)(x+1), x\in[-1,0]$

$g'(x)=2f(x)f'(x)-2f(0)=2\left[f(x)f'(x)-f(0)\right]$

$$-1<x<0 \overset{f\uparrow}{\Longrightarrow} f(-1)<f(x)<f(0) \overset{f(-1)=0}{\Longrightarrow} 0<f(x)<f(0)$$

$$-1<x<0 \overset{f\uparrow}{\Longrightarrow} f(x)>f(-1) \overset{f(-1)=0}{\Longrightarrow} f(x)>0 \Rightarrow f^2(x)>0 \Rightarrow 3f^2(x)>0 \Rightarrow$$
$$3f^2(x)+1>1>0$$

$$\left.\begin{cases} 3f^2(x)+1>1 \\ 3f^2(x)+1>0 \end{cases}\right\} \xRightarrow{\substack{\text{Αν } \alpha\beta>0 \text{ τότε ισχύει η ισοδυναμία:} \\ \alpha>\beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}<\frac{1}{\beta}}} \quad 0<\frac{1}{3f^2(x)+1}<1 \xRightarrow{f'(x)=\frac{1}{3f^2(x)+1}}$$

$$\left.\begin{cases} 0<f'(x)<1 \\ 0<f(x)<f(0) \end{cases}\right\} \xRightarrow{(\bullet)} f'(x)f(x)<1\bullet f(0) \Rightarrow f'(x)f(x)-f(0)<0 \Rightarrow$$

$$2\left[f'(x)f(x)-f(0)\right]<0 \Rightarrow g'(x)<0$$

$$\text{Έχω}: \left\{\begin{array}{l} (\text{I})\, g'(x)<0 \text{ για κάθε } x\in(-1,0) \\ (\text{II})\text{Η } g \text{ είναι συνεχής στο } [-1,0] \text{ ως άθροισμα συνεχών} \\ \text{συναρτήσεων} \end{array}\right\}$$

Οπότε $g \overset{\vee}{\downarrow} [-1,0]$

$$-1\le x\le 0 \xRightarrow{g\overset{\vee}{\downarrow}[-1,0]} g(-1)\ge g(x) \xRightarrow{g(-1)=0} 0\ge g(x) \Rightarrow g(x)\le 0 \Rightarrow$$

$$f^2(x)-2f(0)(x+1)\le 0 \Rightarrow f^2(x)\le 2f(0)(x+1)$$

$(VIII)$ Αν $x\in(-1,0)$:

$$\text{Έχω}: \left\{\begin{array}{l} (\text{I})\text{Η συνάρτηση } f \text{ είναι συνεχής στο κλειστό} \\ \text{διάστημα } [-1,x] \\ (\text{II})\text{Η συνάρτηση } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο ανοιχτό} \\ \text{διάστημα } (-1,x) \end{array}\right\}$$

Οπότε η συνάρτηση f τις προυποθέσεις του θερήματος της Μέσης Τιμής στο κλειστό διάστημα $(-1,x)$.Οπότε υπάχει ένα τουλάχιστον $\xi_x\in(-1,0)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f'(\xi_x)=\dfrac{f(x)-f(-1)}{0-(-1)}$

$$\left.\begin{cases} f'(\xi_x)=\dfrac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} \\ \xi\in(-1,0) \end{cases}\right\} \xLeftrightarrow{\substack{f(-1)=0 \\ f'(\xi_x)=\frac{1}{3f^2(\xi_x)+1}}} \left.\begin{cases} \dfrac{1}{3f^2(\xi_x)+1}=\dfrac{f(x)-0}{x+1} \\ \xi_x\in(-1,0) \end{cases}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{cases} f(x)=\dfrac{x+1}{3f^2(\xi_x)+1} \\ \xi_x\in(-1,0) \end{cases}\right\}$$

$$-1<\xi_x \overset{f\uparrow}{\Longrightarrow} f(-1)<f(\xi_x) \overset{f(-1)=0}{\Longrightarrow} f(\xi_x)>0 \Rightarrow f^2(\xi_x)>0 \Rightarrow 3f^2(\xi_x)>0 \Rightarrow$$

$$3f^2(\xi_x)+1>1>0$$

$$\left.\begin{cases} 3f^2(\xi_x)+1>1 \\ 3f^2(\xi_x)+1>0 \end{cases}\right\} \overset{\text{Αν } \alpha\beta>0 \text{ τότε ισχύει η ισοδυναμία: } \alpha>\beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}<\frac{1}{\beta}}{\Longrightarrow} \quad 0<\frac{1}{3f^2(\xi_x)+1}<1$$

$$x\in(-1,0) \Rightarrow -1<x<0 \Rightarrow 0<x+1<1$$

$$\left.\begin{cases} 0<x+1<1 \\ 0<\dfrac{1}{3f^2(\xi_x)+1}<1 \end{cases}\right\} \overset{(\cdot)}{\Longrightarrow} (x+1)\frac{1}{3f^2(\xi_x)+1}<1\cdot 1 \Rightarrow \frac{x+1}{3f^2(\xi_x)+1}<1 \overset{f(x)=\frac{x+1}{3f^2(\xi_x)+1}}{\Longrightarrow}$$

$$f(x)<1$$

12.

Θεωρούμε την κυρτή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *με συνεχή πρώτη παράγωγο για την οποια ισχύουν*:

- $f'(x)\neq 0$ *για κάθε* $x\in\mathbb{R}$,
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$,
- $f(x)>0$ *για κάθε* $x\in\mathbb{R}$

Θεωρούμε επιπλέον την συνάρτηση $h(x)=f^2(x), x\in\mathbb{R}$

(I) Ν*α αποδείξετε ότι η* f *είναι γνησίως αύξουσα στο* $\mathbb{R}$

(II) Ν*α αποδείξετε ότι η* h' *είναι γνησίως αύξουσα στο* $\mathbb{R}$

(III) Ν*α αποδείξετε ότι για κάθε* $x\in\mathbb{R}$ *ισχύει*

$$\frac{f(x+1)}{f(x)}>\sqrt{\frac{2f'(x)}{f(x)}+1}$$

(IV) Ν*α βρείτε το πληθός των ριζών της εξίσωσης*:

$$e^{2x-\sqrt{x^2+1}}-\sqrt{2}\,f(2)\cdot e^x+\frac{f^2(1)+f^2(3)}{4}e^{\sqrt{x^2+1}}=0$$

$$(\mathrm{I})\ \boxed{\begin{array}{l} \mathrm{A}\nu:\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\mathrm{H}\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ \delta\iota\acute{\alpha}\sigma\tau\eta\mu\alpha\ \Delta\\(\mathrm{II})\mathrm{H}\ f(x)\neq 0\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in\Delta\\(\mathrm{III})\mathrm{T}o\ \sigma\acute{\upsilon}\nu o\lambda o\ \Delta\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \delta\iota\acute{\alpha}\sigma\tau\eta\mu\alpha\end{array}\right\} \\ \mathrm{T}\acute{o}\tau\varepsilon\ f(x)>0\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in\Delta\ \acute{\eta}\ f(x)<0\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in\Delta\end{array}}$$

$$\acute{E}\chi\omega:\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\mathrm{H}\ f'\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ (-\infty,+\infty)\\(\mathrm{II})\mathrm{H}\ f'(x)\neq 0\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in(-\infty,+\infty)\end{array}\right\}$$

$\mathrm{O}\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ f'(x)>0\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in(-\infty,+\infty)\ \acute{\eta}\ f'(x)<0\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in(-\infty,+\infty)$

$\acute{E}\sigma\tau\omega\ f'(x)<0\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in(-\infty,+\infty).\Theta\varepsilon\omega\rho\acute{\omega}\ \tau\eta\nu\ \varepsilon\varphi\alpha\pi\tau o\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta\ (\varepsilon)\ \tau\eta\varsigma$

$C_f\ \sigma\tau o\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o\ \varepsilon\pi\alpha\varphi\acute{\eta}\varsigma\ \mathrm{A}(x_0,f(x_0)).\mathrm{T}\acute{o}\tau\varepsilon\ \eta\ (\varepsilon)\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\varepsilon\iota\ \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta:$

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

$\underline{\acute{E}\sigma\tau\omega\ \eta\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \kappa\upsilon\rho\tau\acute{\eta}.\ \text{Τότε}\ \alpha\nu\ \pi\acute{\alpha}\rho\omega\ \tau\eta\nu\ \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta}$

$\underline{\varepsilon\varphi\alpha\pi\tau o\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta\varsigma\ \tau\eta\varsigma\ C_f\ \sigma\tau o\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o\ \mathrm{A}\left(x_0, f\left(x_0\right)\right) \kappa\alpha\iota\ \tau\eta\nu\ \lambda\acute{\upsilon}\sigma\omega\ \omega\varsigma\ \pi\rho o\varsigma}$

$\underline{y\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega\ f\left(x\right) \geq y}$

Επειδή η συνάρτηση f είναι κυρτή θα έχω:

$f\left(x\right) \geq f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right) + f\left(x_0\right)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right) = f'\left(x_0\right) \lim\limits_{x \to -\infty}\left(x - x_0\right) = f'\left(x_0\right)\left(-\infty\right) = +\infty \left(f'\left(x_0\right) < 0\right)$

Οπότε $\lim\limits_{x \to -\infty}\left[f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right) + f\left(x_0\right)\right] = +\infty$

$$\acute{E}\chi\omega: \begin{Bmatrix} \left(\mathrm{I}\right) f\left(x\right) \geq f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right) + f\left(x_0\right) \\ \left(\mathrm{II}\right) \lim\limits_{x \to -\infty}\left[f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right) + f\left(x_0\right)\right] = +\infty \end{Bmatrix}$$

Οπότε $\lim\limits_{x \to -\infty} f\left(x\right) = +\infty \left(\text{Άτοπο γιατί } \lim\limits_{x \to -\infty} f\left(x\right) = 0\right)$

Οπότε $f'\left(x\right) > 0$ για κάθε $x \in \left(-\infty, +\infty\right)$. Επειδή $f'\left(x\right) > 0$ για κάθε $x \in \left(-\infty, +\infty\right)$ η f είναι γνησίως αύξουσα.

$\left(\mathrm{II}\right)$ Η συνάρτηση $h\left(x\right)$ είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $f\left(x\right)$ και x^2. Οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θα έχω:

$h'\left(x\right) = \left[f^2\left(x\right)\right]' = 2f\left(x\right)f'\left(x\right)$

$\underline{\mathrm{A}\nu\ x_1 < x_2:}$

$x_1 < x_2 \overset{\text{Η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα}}{\Longrightarrow} f\left(x_1\right) < f\left(x_2\right)$

Επειδή η συνάρτηση f είναι κυρτή η f' είναι γνησίως αύξουσα

$x_1 < x_2 \overset{\text{Η } f' \text{ είναι γνησίως αύξουσα}}{\Longrightarrow} f'\left(x_1\right) < f'\left(x_2\right)$

Επειδή $f\left(x\right) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θα έχω $f\left(x_1\right) > 0$ και $f\left(x_2\right) > 0$

Επειδή $f'\left(x\right) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θα έχω $f'\left(x_1\right) > 0$ και $f'\left(x_2\right) > 0$

$$\begin{Bmatrix} f\left(x_1\right) < f\left(x_2\right) \\ f'\left(x_1\right) < f'\left(x_2\right) \\ f\left(x_1\right) > 0,\ f\left(x_2\right) > 0 \\ f'\left(x_1\right) > 0,\ f'\left(x_2\right) > 0 \end{Bmatrix} \overset{\substack{\text{Μπορώ να πολλαπλασιάσω} \\ \text{ομ όστροφες ανισώσεις κατά} \\ \text{μέλη όταν όλα τα μέλη είναι} \\ \text{μη αρνητικοί αριθμοί}}}{\Longrightarrow} f\left(x_1\right)f'\left(x_1\right) < f\left(x_2\right)f'\left(x_2\right) \Rightarrow$$

$$2f(x_1)f'(x_1)<2f(x_2)f'(x_2)\overset{h'(x)=2f(x)f'(x)}{\Longrightarrow} h'(x_1)<h'(x_2)$$

Άρα η συνάρτηση h' είναι γνησίως αύξουσα

(III) Αν $x_0\in\mathbb{R}$ *έχω*:

$1>0\Rightarrow x_0+1>x_0\Rightarrow x_0<x_0+1$

Οπότε το σύνολο $[x_0,x_0+1]$ είναι διάφορο του κενού!!!

$$\text{Έχω}:\left\{\begin{array}{l}(\text{I})\ \text{Η συνάρτηση } h \text{ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα}\\ [x_0,x_0+1]\ \text{ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων}\\ (\text{II})\ \text{Η συνάρτηση } h \text{ είναι παραγωγίσιμη στο ανοιχτό}\\ \text{διάστημα } (x_0,x_0+1)\ \text{ως σύνθεση παραγωγίσιμων}\\ \text{συναρτήσεων}\end{array}\right\}$$

Οπότε η συνάρτηση h ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος της Μέσης Τιμής στο κλειστό διάστημα $[x_0,x_0+1]$. Οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(x_0,x_0+1)$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$\frac{h(x_0+1)-h(x_0)}{(x_0+1)-x_0}=h'(\xi)$$

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{h(x_0+1)-h(x_0)}{(x_0+1)-x_0}=h'(\xi)\\ x_0<\xi<x_0+1\end{array}\right\}\overset{\substack{h'\uparrow\mathbb{R}\\ h(x)=f^2(x)}}{\Longrightarrow}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{f^2(x_0+1)-f^2(x_0)}{1}=h'(\xi)\\ h'(x_0)<h'(\xi)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}f^2(x_0+1)-f^2(x_0)=h'(\xi)\\ h'(\xi)>h'(x_0)\end{array}\right\}\Rightarrow f^2(x_0+1)-f^2(x_0)>h'(x_0)\overset{h'(x)=2f(x)f'(x)}{\Longrightarrow}$$

$$f^2(x_0+1)-f^2(x_0)>2f(x_0)f'(x_0)\Rightarrow f^2(x_0+1)>2f(x_0)f'(x_0)+f^2(x_0)$$

$$\overset{\substack{f(x_0)\neq0\Rightarrow f^2(x_0)>0\\ \text{Διαιρώ και τα δυο μέλη}\\ \text{της ανίσωσης με το } f^2(x_0)}}{\Longrightarrow}\quad\frac{f^2(x_0+1)}{f^2(x_0)}>\frac{2f(x_0)f'(x_0)+f^2(x_0)}{f^2(x_0)}\Rightarrow$$

$$\left[\frac{f(x_0+1)}{f(x_0)}\right]^2>\frac{2f(x_0)f'(x_0)}{f^2(x_0)}+\frac{f^2(x_0)}{f^2(x_0)}\Rightarrow$$

$$\left[\frac{f(x_0+1)}{f(x_0)}\right]^2>\frac{2f'(x_0)}{f(x_0)}+1\overset{f'(x_0),\,f(x_0)>0}{\Longrightarrow}\sqrt{\left[\frac{f(x_0+1)}{f(x_0)}\right]^2}>\sqrt{\frac{2f'(x_0)}{f(x_0)}+1}\overset{\sqrt{\alpha^2}=|\alpha|}{\Longrightarrow}$$

$$\left|\frac{f(x_0+1)}{f(x_0)}\right| > \sqrt{\frac{2f'(x_0)}{f(x_0)}+1} \Rightarrow \frac{f(x_0+1)}{f(x_0)} > \sqrt{\frac{2f'(x_0)}{f(x_0)}+1}$$

$$\acute{E}\chi\omega : \left.\begin{cases} f(x_0+1) > 0 \\ f(x_0) > 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow \frac{f(x_0+1)}{f(x_0)} > 0 \Rightarrow \left|\frac{f(x_0+1)}{f(x_0)}\right| = \frac{f(x_0+1)}{f(x_0)}$$

Επειδή για τυχαίο $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει $\frac{f(x_0+1)}{f(x_0)} > \sqrt{\frac{2f'(x_0)}{f(x_0)}+1}$ τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θα ισχύει $\frac{f(x+1)}{f(x)} > \sqrt{\frac{2f'(x)}{f(x)}+1}$

(IV) $\acute{E}\chi\omega : x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+1 \geq 1 > 0 \Rightarrow x^2+1 > 0$

$$e^{2x-\sqrt{x^2+1}} - \sqrt{2}\, f(2) \bullet e^x + \frac{f^2(1)+f^2(3)}{4} e^{\sqrt{x^2+1}} = 0 \overset{\substack{\sqrt{x^2+1}=\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)+x \\ 2x-\sqrt{x^2+1}=x+\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)}}{\Longleftrightarrow}$$

$$e^{x+\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)} - \sqrt{2}\, f(2) \bullet e^x + \frac{f^2(1)+f^2(3)}{4} e^{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)+x} = 0 \overset{a^{x+y}=a^x a^y,\ \alpha>0,\ x,y\in\mathbb{R}}{\Longleftrightarrow}$$

$$e^x e^{x-\sqrt{x^2+1}} - \sqrt{2}\, f(2) \bullet e^x + \frac{f^2(1)+f^2(3)}{4} e^x e^{\sqrt{x^2+1}-x} = 0 \overset{\text{Βγάζω κοινό παράγοντα το } e^x}{\Longleftrightarrow}$$

$$e^x \left[e^{x-\sqrt{x^2+1}} - \sqrt{2}\, f(2) + \frac{f^2(1)+f^2(3)}{4} e^{\sqrt{x^2+1}-x} \right] = 0 \overset{e^x \neq 0}{\Longleftrightarrow}$$

$$e^{x-\sqrt{x^2+1}} - \sqrt{2}\, f(2) + \frac{f^2(1)+f^2(3)}{4} e^{\sqrt{x^2+1}-x} = 0 \overset{\sqrt{x^2+1}-x=-\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)}{\Longleftrightarrow}$$

$$e^{x-\sqrt{x^2+1}} - \sqrt{2}\, f(2) + \frac{f^2(1)+f^2(3)}{4} e^{-\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)} = 0 \overset{a^{-x}=\frac{1}{a^x},\ a>0,\ x\in\mathbb{R}}{\Longleftrightarrow}$$

$$e^{x-\sqrt{x^2+1}} - \sqrt{2}\, f(2) + \frac{f^2(1)+f^2(3)}{4} \frac{1}{e^{x-\sqrt{x^2+1}}} = 0 \overset{\substack{\text{Πολλαπλασιλαζω και τα δυο μέλη} \\ \text{της εξίσωσης με το } e^{x-\sqrt{x^2+1}}}}{\Longleftrightarrow}$$

$$e^{x-\sqrt{x^2+1}} \left(e^{x-\sqrt{x^2+1}} - \sqrt{2}\, f(2) + \frac{f^2(1)+f^2(3)}{4} \frac{1}{e^{x-\sqrt{x^2+1}}} \right) = e^{x-\sqrt{x^2+1}} \bullet 0 \Leftrightarrow$$

$$e^{x-\sqrt{x^2+1}} e^{x-\sqrt{x^2+1}} - \sqrt{2}\, f(2) e^{x-\sqrt{x^2+1}} + \frac{f^2(1)+f^2(3)}{4} = 0 \Leftrightarrow$$

$$e^{x-\sqrt{x^2+1}}e^{x-\sqrt{x^2+1}}-\sqrt{2}\ f(2)e^{x-\sqrt{x^2+1}}+\frac{f^2(1)+f^2(3)}{4}=0\Leftrightarrow$$

$$\left(e^{x-\sqrt{x^2+1}}\right)^2-\sqrt{2}\ f(2)e^{x-\sqrt{x^2+1}}+\frac{f^2(1)+f^2(3)}{4}=0(1)$$

Θέτω $e^{x-\sqrt{x^2+1}}=t, t>0(2)$

Απο τις σχέσεις $(1),(2)$ θα έχω:

$$(1)\Leftrightarrow\left(e^{x-\sqrt{x^2+1}}\right)^2-\sqrt{2}\ f(2)e^{x-\sqrt{x^2+1}}+\frac{f^2(1)+f^2(3)}{4}=0\overset{e^{x-\sqrt{x^2+1}}=t,t>0}{\Longleftrightarrow}$$

$$t^2-\sqrt{2}\ f(2)t+\frac{f^2(1)+f^2(3)}{4}=0(3)$$

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=\left(-\sqrt{2}\ f(2)\right)^2-4\frac{f^2(1)+f^2(3)}{4}=$$

$$=\left(\sqrt{2}\right)^2 f^2(2)-\left[f^2(1)+f^2(3)\right]=2f^2(2)-f^2(1)-f^2(3)\overset{h(x)=f^2(x)}{=}$$

$$=2h(2)-h(1)-h(3)=h(2)-h(1)+h(2)-h(3)\overset{h(2)-h(3)=-(h(3)-h(2))}{=}$$

$$\left[h(2)-h(1)\right]-\left[h(3)-h(2)\right]$$

Οπότε: $\Delta=\left[h(2)-h(1)\right]-\left[h(3)-h(2)\right]$

Έχω: $\left\{\begin{array}{l}\text{(I) Η συνάρτηση } h \text{ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα}\\ [1,2] \text{ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων}\\ \text{(II) Η συνάρτηση } h \text{ είναι παραγωγίσιμη στο ανοιχτό}\\ \text{διάστημα } (1,2) \text{ ως σύνθεση παραγωγίσιμων}\\ \text{συναρτήσεων}\end{array}\right\}$

Οπότε η συνάρτηση h ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος της Μέσης Τιμής στο κλειστό διάστημα $[1,2]$. Οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1\in(1,2)$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$\frac{h(2)-h(1)}{2-1}=h'(\xi_1)$$

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{h(2)-h(1)}{2-1}=h'(\xi_1)\\ 1<\xi_1<2\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}h(2)-h(1)=h'(\xi_1)\\ 1<\xi_1<2\end{array}\right\}e$$

$$\text{Έχω}:\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\text{Η συνάρτηση } h \text{ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα}\\ [2,3] \text{ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων}\\ (\mathrm{II})\text{Η συνάρτηση } h \text{ είναι παραγωγίσιμη στο ανοιχτό}\\ \text{διάστημα } (2,3) \text{ ως σύνθεση παραγωγίσιμων}\\ \text{ συναρτήσεων}\end{array}\right\}$$

Οπότε η συνάρτηση h ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος της Μέσης Τιμής στο κλειστό διάστημα $[2,3]$*.Οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον* $\xi_2\in(2,3)$ *τέτοιο ώστε να ισχύει*

$$\frac{h(3)-h(2)}{3-2}=h'(\xi_2)$$

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{h(3)-h(2)}{3-2}=h'(\xi_2)\\ 2<\xi_2<3\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}h(3)-h(2)=h'(\xi_2)\\ 2<\xi_2<3\end{array}\right\}$$

$$1<\xi_1<2<\xi_2<3\Rightarrow\xi_1<\xi_2\overset{h'\uparrow}{\Longrightarrow}h'(\xi_1)<h'(\xi_2)\Rightarrow h'(\xi_1)-h'(\xi_2)<0$$

$$\xRightarrow{\substack{h'(\xi_1)=h(2)-h(1)\\ h'(\xi_2)=h(2)-h(1)}}\left[h(2)-h(1)\right]-\left[h(2)-h(1)\right]<0\xRightarrow{\Delta=[h(2)-h(1)]-[h(2)-h(1)]}\Delta<0$$

Επειδή $\Delta<0$ *η δευτεροβάθμια εξίσωση (3) δεν έχει πραγματικές ρίζες. Συνεπώς και η εξίσωση (1) δεν έχει πραγματικές ρίζες.*

13.

$\Delta ίνεται\ η\ συνάρτηση\ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ για\ την\ οποία\ ισχύει:$

$e^{f(x)-e^x} \le f(x)e^{x+1} - e^{2x+1} - xe^{x+1}\ για\ κάθε\ x\in\mathbb{R}$

$(\mathrm{I})\ \mathrm{N}α\ αποδείξετε\ ότι\ f(x) = e^x + x + 1\ για\ κάθε\ x\in\mathbb{R}$

$(\mathrm{II})\ \mathrm{N}α\ αποδείξετε\ υπάρχει\ μοναδικό\ x_0 < 0\ τέτοιο\ ώστε$

$$\ln\left(\frac{e^{x_0}+1}{|x_0|}\right) = 0$$

$(\mathrm{III})\ \mathrm{N}α\ αποδείξετε\ ότι\ για\ κάθε\ x>0\ υπάρχει\ ένα\ τουλάχιστον$

$\xi_1\ τέτοιο\ ώστε:$

$$f(x) = xf'(\xi_1) + 2$$

$(\mathrm{IV})\ \mathrm{N}α\ αποδείξετε\ υπάρχει\ ένα\ τουλάχιστον\ \xi_2 < 0\ τέτοιο\ ώστε$

$f''(\xi_2) = -1 - \dfrac{2}{x_0}\ όπου\ x_0\ είναι\ η\ ρίζα\ του\ ερωτήματος\ (\mathrm{II})$

$$(\mathrm{I})\ e^{f(x)-e^x} \le f(x)e^{x+1} - e^{2x+1} - xe^{x+1} \overset{e^{2x+1}=e^{x+1}e^x}{\Longleftrightarrow} e^{f(x)-e^x} \le f(x)e^{x+1} - e^{x+1}e^x - xe^{x+1}$$

$Απο\ το\ δεύτερο\ μέλος\ βγάζω\ κοινό\ παράγοντα\ το\ e^{x+1}$

$$\Longleftrightarrow \quad e^{f(x)-e^x} \le e^{x+1}\left[f(x) - e^x - x\right] \quad \Longleftrightarrow$$

$\Delta ιαιρώ\ και\ τα\ δυο\ της\ ανίσωσης\ με\ το\ e^{x+1}$

$$\frac{e^{f(x)-e^x}}{e^{x+1}} \le \frac{e^{x+1}\left[f(x)-e^x-x\right]}{e^{x+1}} \Leftrightarrow e^{f(x)-e^x-x-1} \le f(x) - e^x - x\ (1)$$

$\boxed{e^x \ge x+1\ για\ κάθε\ x\in\mathbb{R}}$

$$e^{f(x)-e^x-x-1} \ge \left(f(x) - e^x - x - 1\right) + 1 \Leftrightarrow e^{f(x)-e^x-x-1} \ge f(x) - e^x - x\ (2)$$

$Απο\ τις\ σχέσεις\ (1),(2)\ θα\ έχω:$

$$\left.\begin{cases} e^{f(x)-e^x-x-1} \le f(x) - e^x - x \\ e^{f(x)-e^x-x-1} \le f(x) - e^x - x \end{cases}\right\} \Rightarrow e^{f(x)-e^x-x-1} = f(x) - e^x - x$$

$\underline{\Gamma νωρίζω\ οτι\ η\ ισότητα\ e^x = x+1\ ισχύει\ μόνο\ για\ x=0}$

$$e^{f(x)-e^x-x-1} = f(x)-e^x-x \Leftrightarrow e^{f(x)-e^x-x-1} = \left(f(x)-e^x-x-1\right)+1 \overset{\Theta έτω\, t=f(x)-e^x-x-1}{\Longleftrightarrow}$$

$$e^t = t+1 \Leftrightarrow t=0 \overset{\Theta έτω\, t=f(x)-e^x-x-1}{\Longleftrightarrow} f(x)-e^x-x-1=0 \Leftrightarrow f(x)=e^x+x+1$$

$$(\mathrm{II})\begin{cases}\ln\left(\dfrac{e^{x_0}+1}{|x_0|}\right)=0\\ x_0<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\ln\left(\dfrac{e^{x_0}+1}{|x_0|}\right)=\ln 1\\ x_0<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{e^{x_0}+1}{|x_0|}=1\\ x_0<0\end{cases} \overset{\text{Επειδή } x_0<0 \text{ θα έχω: } |x_0|=-x_0}{\Longleftrightarrow}$$

$$\begin{cases}\dfrac{e^{x_0}+1}{-x_0}=1\\ x_0<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}e^{x_0}+1=-x_0\\ x_0<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}e^{x_0}+x_0+1=0\\ x_0<0\end{cases} \overset{f(x)=e^x+x+1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases}f(x_0)=0\\ x_0<0\end{cases}$$

$$f'(x)=\left(e^x+x+1\right)'=\left(e^x\right)'+(x)'+(1)'=e^x+1$$

$$\begin{cases}e^x>0\\ 1>0\end{cases} \overset{(+)}{\Longrightarrow} e^x+1>0 \Rightarrow f'(x)>0$$

Επειδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ η $f\underset{\wedge}{\uparrow}\mathbb{R}$

$$Έχω: \begin{cases}(\mathrm{I})\ \text{Η } f \text{ είναι συνεχής στο } (-\infty,0) \text{ ως άθροισμα συνεχών}\\ \text{συναρτήσεων}\\ (\mathrm{II})\ f\underset{\wedge}{\uparrow}(-\infty,0)\end{cases}$$

Οπότε $f\left((-\infty,0)\right)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)\right)=(-\infty,2)$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(e^x+x+1\right)=\lim_{x\to-\infty}e^x+\lim_{x\to-\infty}x+1 \overset{\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0}{=} 0+(-\infty)+1=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(e^x+x+1\right)=2$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}\alpha^x=\begin{cases}0, a>1\\ +\infty, 0<a<1\end{cases}}$$

Επειδή $0\in(-\infty,2)=f\left((-\infty,0)\right)$ θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0<0$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0.$

Έχω $f\underset{\wedge}{\uparrow}\mathbb{R}$ οπότε η f είναι "1−1". Επειδή θα υπάρχει $x_0<0$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$ και η f είναι "1−1" το x_0 είναι μοναδικό

$$(\mathrm{III})\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\,\text{Η } \textit{συνάρτηση } f \textit{ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα } [0,x] \\ \textit{ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων} \\ (\mathrm{II})\,\text{Η } \textit{συνάρτηση } f \textit{ είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα} \\ (0,x) \textit{ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων}\end{array}\right\}$$

Ο*πότε η συνάρτηση* f *ικανοποιεί τις προυποθέσεις του* Θ.Μ.Τ *στο κλειστό διάστημα* $[0,x]$.Ο*πότε υπάρχει ένα τουλάχιστον* $\xi_1 \in (0,x)$ *τέτοιο ώστε να ισχύει* $f'(\xi_1)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(\xi_1)\\ \xi_1\in(0,x)\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\dfrac{f(x)-2}{x}=f'(\xi_1)\\ \xi_1\in(0,x)\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}f(x)-2=f'(\xi_1)x\\ \xi_1\in(0,x)\end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}f(x)=f'(\xi_1)x+2\\ \xi_1\in(0,x)\end{array}\right\}$$

$(\mathrm{IV})\ f(x)=e^x+x+1,\ f'(x)=e^x+1$

$$\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\,\text{Η } \textit{συνάρτηση } f' \textit{ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα } [x_0,0] \\ \textit{ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων} \\ (\mathrm{II})\,\text{Η } \textit{συνάρτηση } f' \textit{ είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα} \\ (x_0,0) \textit{ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων}\end{array}\right\}$$

Ο*πότε η συνάρτηση* f' *ικανοποιεί τις προυποθέσεις του* Θ.Μ.Τ *στο κλειστό διάστημα* $[x_0,0]$.Ο*πότε υπάρχει ένα τουλάχιστον* $\xi_2 \in (x_0,0)$ *τέτοιο ώστε να ισχύει* $f''(\xi_2)=\dfrac{f'(0)-f'(x_0)}{0-x_0}$

$$\left\{\begin{array}{l}f''(\xi_2)=\dfrac{f'(0)-f'(x_0)}{0-x_0}\\ \xi_2\in(x_0,0)\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}f''(\xi_2)=\dfrac{2-(e^{x_0}+1)}{0-x_0}\\ \xi_2\in(x_0,0)\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}f''(\xi_2)=\dfrac{1-e^{x_0}}{-x_0}\\ \xi_2\in(x_0,0)\end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}f''(\xi_2)=\dfrac{-(e^{x_0}-1)}{-x_0}\\ \xi_2\in(x_0,0)\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}f''(\xi_2)=\dfrac{e^{x_0}-1}{x_0}\\ \xi_2\in(x_0,0)\end{array}\right\}$$

$\text{Απο το ερώτημα } (\text{II}) \text{ έχω} : e^{x_0} = -x_0 - 1$

$$\begin{cases} f''(\xi_2) = \dfrac{e^{x_0}-1}{x_0} \\ \xi_2 \in (x_0, 0) \end{cases} \overset{e^{x_0}=-x_0-1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} f''(\xi_2) = \dfrac{-x_0-1-1}{x_0} \\ \xi_2 \in (x_0, 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f''(\xi_2) = \dfrac{-x_0-2}{x_0} \\ \xi_2 \in (x_0, 0) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} f''(\xi_2) = \dfrac{-x_0}{x_0} - \dfrac{2}{x_0} \\ \xi_2 \in (x_0, 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f''(\xi_2) = -1 - \dfrac{2}{x_0} \\ \xi_2 \in (x_0, 0) \end{cases}$$

14.

Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *για την οποία ισχύει* :

- $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$ *για κάθε* $x, y \in \mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)+3}{x-1} = -2$

(I) Να *αποδείξετε ότι η συνάρτηση* f *είναι συνεχής στο* $x_0 = 1$ *και ότι* $f(1) = -3$

(II) Να *αποδείξετε ότι η συνάρτηση* f *είναι συνεχής στο σημείο* $x_1 = 0$

(III) Να *αποδείξετε ότι η συνάρτηση* f *είναι συνεχής*

(IV) Να *αποδείξετε ότι η συνάρτηση* f *είναι παραγωγίσιμη και ότι* $f(x) = x^2 - 4x$

(V) Αν *γνωρίζουμε ότι ισχύει η σχέση* $f^2(x) + 8f(x) + x^2 + 2x + 12 \geq 0$ *για κάθε* $x \in \mathbb{R}$ *να δείξετε ότι το πλησιέστερο σημείο της γραφικής παράστασης της* f *στο σημείο* Α$(-1,-4)$ *είναι το σημείο* Μ$(1,-3)$ *και η εφαπτομένη στο σημείο* Μ *είναι κάθετη στην* ΑΜ.

$(\mathrm{I})\,\Theta\varepsilon\omega\rho\acute{\omega}\ \tau\eta\nu\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ g(x)=\dfrac{f(x)+3}{x-1},\ x\in(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$

$\mathrm{T}\acute{o}\tau\varepsilon\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega:\lim\limits_{x\to1}g(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)+3}{x-1}=-2$

$$\left\{\begin{matrix} g(x)=\dfrac{f(x)+3}{x-1} \\ x\neq-1 \end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix} g(x)=\dfrac{f(x)+3}{x-1} \\ x\neq-1 \end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix} f(x)+3=g(x)(x-1) \\ x\neq-1 \end{matrix}\right\}$$

$$\left\{\begin{matrix} f(x)=g(x)(x-1)-3 \\ x\neq-1 \end{matrix}\right\}$$

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\left[g(x)(x-1)-3\right]=\lim_{x\to1}g(x)\lim_{x\to1}(x-1)-3=-2\bullet0-3=-3$$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -3$

$\Theta\acute{\varepsilon}\tau\omega : x-1=t \Rightarrow x=t+1$

$x\to 1 \Rightarrow x-1\to 0 \Rightarrow t\to 0$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -3 \Rightarrow \lim\limits_{t\to 0} f(1+t) = -3 \overset{f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy}{\Longrightarrow} \lim\limits_{t\to 0}\left[f(1)+f(t)+2t\right] = -3 \Rightarrow$

$\lim\limits_{t\to 0} f(t) + f(1) = -3 \Rightarrow \lim\limits_{t\to 0} f(t) = -3 - f(1)$

$T\acute{o}\tau\varepsilon\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega :$

$A\nu\ x=y=0\ \ \alpha\pi o\ \tau\eta\nu\ \sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\eta\ f(x+y) = f(x)+f(y)+2xy\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega :$

$f(0+0) = f(0)+f(0)+2\bullet 0\bullet 0 \Leftrightarrow \cancel{f(0)} = \cancel{f(0)} + f(0) \Leftrightarrow f(0)=0$

$A\nu\ y=-x\ \alpha\pi o\ \tau\eta\nu\ \sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\eta\ f(x+y) = f(x)+f(y)+2xy\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega :$

$f(x-x) = f(x)+f(-x)+2x(-x) \Leftrightarrow 0 = f(x)+f(-x)-2x^2 \Leftrightarrow$

$f(x)+f(-x) = 2x^2$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) \overset{\substack{x=-w \\ x\to 0\Rightarrow w\to 0}}{=} \lim\limits_{w\to 0} f(-w) = \lim\limits_{x\to 0} f(-x)$

$f(x)+f(-x) = 2x^2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\left[f(x)+f(-x)\right] = \lim\limits_{x\to 0} 2x^2 \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to 0}\left[f(x)+f(-x)\right] = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) + \lim\limits_{x\to 0} f(-x) = 0 \overset{\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} f(-x)}{\Longleftrightarrow} 2\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 \overset{\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-3-f(1)}{\Longrightarrow} -3-f(1)=0 \Leftrightarrow f(1)=-3$

$$(\mathrm{II})\left\{\begin{aligned} &\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \\ &f(0)=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

$\Sigma\upsilon\nu\varepsilon\pi\acute{\omega}\varsigma\ \eta\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o\ x_1 = 0$

$(\mathrm{III})\ A\nu\ x\to x_0\ \theta\acute{\varepsilon}\tau\omega\ x-x_0 = t$

$x-x_0 = t \Leftrightarrow x = x_0 + t$

$x\to x_0 \Rightarrow x-x_0\to 0 \Rightarrow t\to 0$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \overset{\substack{x=x_0+t\\ t\to 0}}{=} \lim_{t\to 0} f(x_0+t) \overset{f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy}{=} \lim_{t\to 0}\left(f(x_0)+f(t)+2x_0 t\right)=$$

$$f(x_0)+\lim_{t\to 0} f(t)+2x_0\lim_{t\to 0} t \overset{\lim_{t\to 0} f(t)=0}{=} f(x_0)+0+2x_0 \bullet 0 = f(x_0)$$

Επειδή *η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο x_0 προκύπτει ότι η f είναι συνεχής.*

(IV) *Έχω*: $\lim_{x\to 1}\dfrac{f(x)+3}{x-1}=-2$

Θ*έτω* $x-1=u \Leftrightarrow x=u+1$

$x\to 1 \Rightarrow x-1\to 0 \Rightarrow u\to 0$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+3}{x-1}=-2 \overset{\substack{x=u+1\\ u\to 0}}{\Longrightarrow} \lim_{u\to 0}\frac{f(1+u)+3}{u}=-2 \overset{f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy}{\Longrightarrow}$$

$$\lim_{u\to 0}\frac{f(1)+f(u)+2u+3}{u}=-2 \overset{f(1)=-3}{\Longrightarrow} \lim_{u\to 0}\frac{-3+f(u)+2u+3}{u}=-2 \Rightarrow$$

$$\lim_{u\to 0}\frac{f(u)+2u}{u}=-2 \Rightarrow \lim_{u\to 0}\left(\frac{f(u)}{u}+\frac{2u}{u}\right)=-2 \Rightarrow \lim_{u\to 0}\frac{f(u)}{u}+2=-2 \Rightarrow$$

$$\lim_{u\to 0}\frac{f(u)}{u}=-2-2 \Rightarrow \lim_{u\to 0}\frac{f(u)}{u}=-4$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \overset{f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy}{=} \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{f(x_0)}+f(h)+2x_0h-\cancel{f(x_0)}}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+2x_0h}{h}=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(h)}{h}+\frac{2x_0h}{h}\right]=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}+2x_0=-4+2x_0$$

Ε*πειδή υπάρχει το* $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ *και είναι πραγματικός αριθμός η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει*:

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=-4+2x_0$$

Ο*πότε* $f'(x)=-4+2x=-(4x)'+(x^2)'=(x^2-4x)'$

$\text{Επειδή } f'(x)=\left(x^2-4x\right)'$ *για κάθε* $x\in\mathbb{R}$ *θα υπάρχει* $c\in\mathbb{R}$ *τέτοιο ώστε για κάθε* $x\in\mathbb{R}$ *να ισχύει*:

$$f(x)=x^2-4x+c$$

Αν $x=0$ *θα έχω*:

$$f(0)=0^2-4\bullet 0+c\overset{f(0)=0}{\Longleftrightarrow}c=0$$

Οπότε *για κάθε* $x\in\mathbb{R}$ *θα έχω*:

$$f(x)=x^2-4x+c\overset{c=0}{=}x^2-4x+0=x^2-4x$$

(V) Αν $\mathrm{K}(x,y)\in C_f\Leftrightarrow y=f(x)$

$$d(\mathrm{A},\mathrm{K})=\sqrt{\left(x_{\mathrm{K}}-x_{\mathrm{A}}\right)^2+\left(y_{\mathrm{K}}-y_{\mathrm{A}}\right)^2}\underset{\mathrm{A}(-1,4)}{\overset{\mathrm{K}(x,f(x))}{=}}\sqrt{\left[x-(-1)\right]^2+\left[f(x)-(-4)\right]^2}=$$

$$\sqrt{(x+1)^2+\left(f(x)+4\right)^2}=\sqrt{x^2+2x+1+f^2(x)+8f(x)+16}=$$

$$\sqrt{x^2+2x+f^2(x)+8f(x)+17}$$

$$f^2(x)+8f(x)+x^2+2x+12\ge 0\Leftrightarrow f^2(x)+8f(x)+x^2+2x+12+5\ge 5$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{f^2(x)+8f(x)+x^2+2x+15}\ge\sqrt{5}\Leftrightarrow d(\mathrm{A},\mathrm{K})\ge\sqrt{5}$$

$$d(\mathrm{A},M)\underset{\mathrm{A}(-1,-4)}{\overset{M(1,-3)}{=}}\sqrt{\left[1-(-1)\right]^2+\left[-3-(-4)\right]^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$$

Οπότε: $d(\mathrm{A},\mathrm{K})\ge d(\mathrm{A},M)$

Αν (ε) *η εφαπτομένη στο σημείο επαφής* $M(1,-3)$. Τότε *θα έχω*:

$$\lambda_\varepsilon=f'(1)\overset{f'(x)=-4+2x}{=}-4+2\bullet 1=-4+2=-2$$

$$\lambda_{\mathrm{AM}}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\underset{\mathrm{A}(-1,-4)}{\overset{M(1,-3)}{=}}\frac{-3-(-4)}{1-(-1)}=\frac{-3+4}{1+1}=\frac{1}{2}$$

Έχω: $\lambda_\varepsilon\lambda_{\mathrm{AM}}=-2\bullet\frac{1}{2}=-1$

Επειδή $\lambda_\varepsilon\lambda_{\mathrm{AM}}=-1$ *θα έχω* $(\varepsilon)\perp\mathrm{AM}$

15.

Δίνονται:

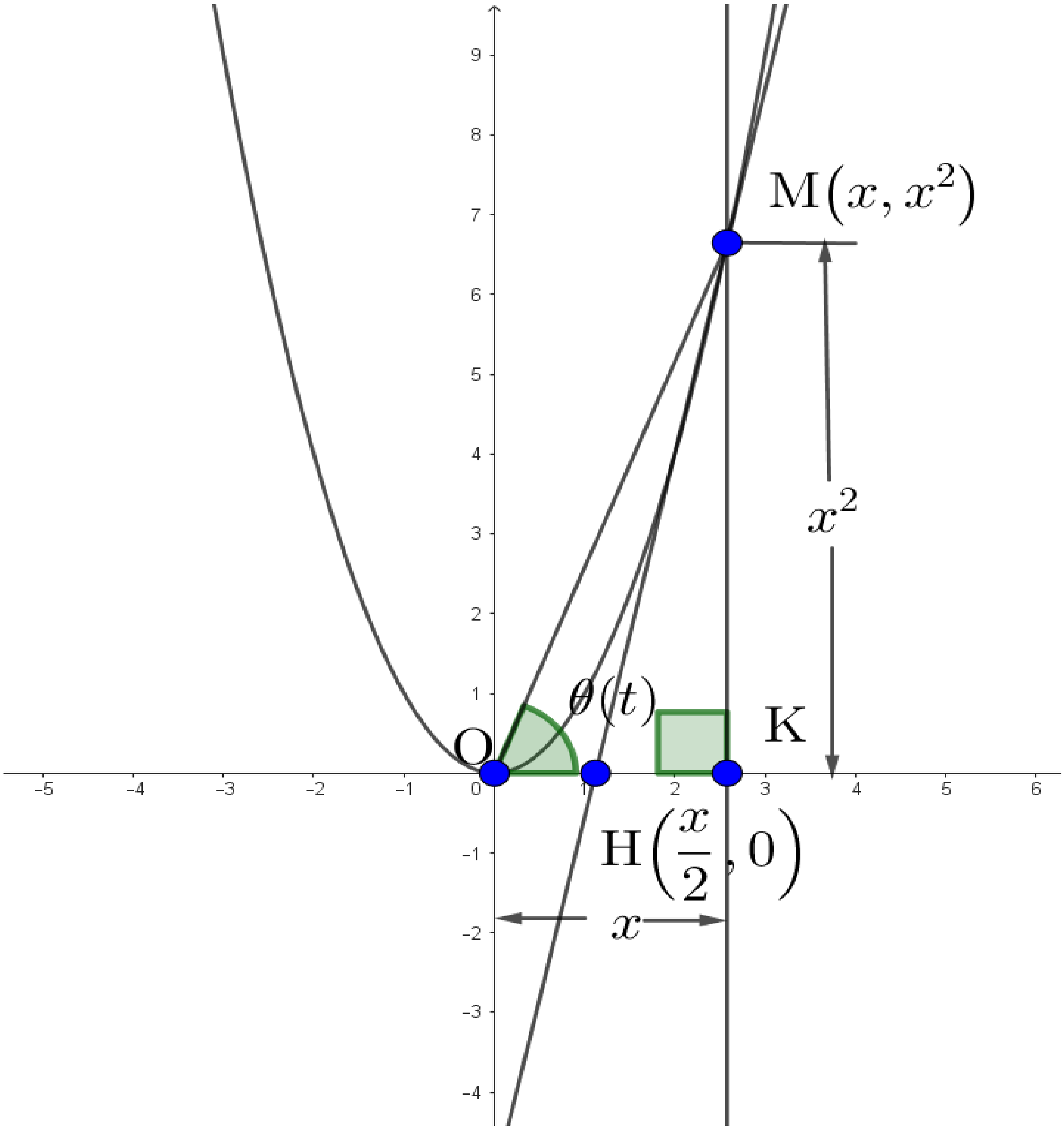
- Η *συνάρτηση* $f(x)=x^2, x>0$
- Το *σημείο* $\mathrm{M}(x(t), y(t))$ *κινείται πάνω στην καμπύλη* C_f *ώστε* $x'(t)=4\ m/s$
- Ο *φορέας του ευθυγράμμου τμήματος* ΜΗ *εφάπτεται στην* C_f, *με* Η *σημείο του άξονα* $x'x$
- $\mathrm{O}(0,0)$ *η αρχή των αξόνων*

(Ι) Ν*α υπολογιστεί η ταχύτητα με την οποία κινείται το σημείο* Η, *στη διεύθυνση του άξονα* $x'x$

(ΙΙ) Ν*α υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου* Μ *την χρονική στιγμή* t_1 *που ισχύει* $\mathrm{MO}=\sqrt{2}\ m$

(ΙΙΙ) Ν*α υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου* ΟΜΗ *την χρονική στιγμή* t_2 *που* $\mathrm{HO}=5m$

(IV) Ν*α αποδείξετε ότι η γωνία* $\widehat{\mathrm{MOH}}$ *με την πάροδο του χρόνου αυξάνεται.*


M(x, x^2)
x^2
$\theta(t)$
O
K
H$\left(\frac{x}{2}, 0\right)$
x
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
9
8
7
6
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4

(I) *Έστω σημείο* $\mathrm{M}\left(x_0, x_0^{\ 2}\right)$ *με* $x_0>0$ *της* C_f *και* (ε) *η*

εφαπτομένη της C *στο τυχαίο σημείο* $\mathrm{M}\left(x_0, x_0^{\ 2}\right)$. Τότε η ευθεία (ε) *θα*

έχει έχει εξίσωση:

$$y-f\left(x_0\right)=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right) \Leftrightarrow y-x_0^{\ 2}=2x_0\left(x-x_0\right) \Leftrightarrow y-x_0^{\ 2}=2x_0x-2x_0^{\ 2} \Leftrightarrow$$

$$y=2x_0x-2x_0^{\ 2}+x_0^{\ 2} \Leftrightarrow y=2x_0x-x_0^{\ 2}$$

$$(\varepsilon): y=2x_0x-x_0^{\ 2}$$

Αν $\mathrm{M}\left(x_M, y_M\right)$ *κοινό σημείο της* (ε) *με τον άξονα* $x'x$. Τότε *θα έχω*:

$$\left\{\begin{array}{l}\mathrm{H}\left(x_\mathrm{H}, y_\mathrm{H}\right) \in(\varepsilon) \\ \mathrm{H}\left(x_\mathrm{H}, y_\mathrm{H}\right) \in x'x\end{array}\right\} \Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y_\mathrm{H}=2x_0x_\mathrm{H}-x_0^{\ 2} \\ y_\mathrm{H}=0\end{array}\right\} \Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x_0\left(2x_\mathrm{H}-x_0\right)=0 \\ y_\mathrm{H}=0\end{array}\right\} \stackrel{x_0 \neq 0}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left\{\begin{array}{l}2x_\mathrm{H}-x_0=0 \\ y_\mathrm{H}=0\end{array}\right\} \Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}2x_\mathrm{H}=x_0 \\ y_\mathrm{H}=0\end{array}\right\} \Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x_\mathrm{H}=\dfrac{x_0}{2} \\ y_\mathrm{H}=0\end{array}\right\} \ \mathrm{H}\left(\frac{x_0}{2}, 0\right)$$

<u>Το Μ *δεν είναι ένα σταθερό αλλά κινείται πάνω στην* C_f. Οπότε</u>

<u>*το* x_0 *δεν παραμένει σταθερό αλλά είναι μια συνάρτηση του* t</u>

<u>Θα *έχω* $x_0=x(t)$ *με ρυθμό μεταβολής* $x'(t)=4\ m/s$</u>

Για *το σημείο* Η *θα έχω* $x_\mathrm{H}(t)=\dfrac{x(t)}{2}$. Τότε *η ταχύτητα η οποία κινείται*

το σημείο Η *πάνω στον άξονα* $x'x$ *θα είναι*:

$$\upsilon_\mathrm{H}(t)=x_\mathrm{H}{}'(t)=\frac{x'(t)}{2}=\frac{4}{2}=2m/s$$

(III) Για *το σημείο* Μ *θα έχω* $y_\mathrm{M}=x^2(t)$. Το *τρίγωνο* ΜΟΚ *είναι ορθογώνιο*

στο $\mathrm{K}\left(\hat{\mathrm{K}}=90^0\right)$. Οπότε *απο το* Πυθαγόρειο *θεώρημα θα έχω*:

$$\mathrm{MO}^2=\mathrm{MK}^2+\mathrm{KO}^2 \Leftrightarrow \mathrm{MO}^2=\left(x^2(t)\right)^2+x^2(t) \Leftrightarrow \mathrm{MO}^2=x^4(t)+x^2(t)$$

Την *χρονική στιγμή* t_1 *θα έχω* $\mathrm{MO}=\sqrt{2}\ m$:

$$(\sqrt{2})^2=x^4\left(t_1\right)+x^2\left(t_1\right) \Leftrightarrow 2=x^4\left(t_1\right)+x^2\left(t_1\right) \Leftrightarrow x^4\left(t_1\right)+x^2\left(t_1\right)-2=0 \Leftrightarrow$$

$$x^4\left(t_1\right)-1+x^2\left(t_1\right)-1=0 \Leftrightarrow x^4\left(t_1\right)-1+x^2\left(t_1\right)-1=0 \Leftrightarrow$$

$$\left(x^2\left(t_1\right)\right)^2-1^2+x^2\left(t_1\right)-1=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2\left(t_1\right)-1\right)\left(x^2\left(t_1\right)+1\right)+x^2\left(t_1\right)-1=0 \Leftrightarrow\left(x^2\left(t_1\right)-1\right)\left(x^2\left(t_1\right)+1+1\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\left(x^2(t_1)-1\right)\left(x^2(t_1)+2\right)=0\left(\begin{array}{l} x^2(t_1)\geq 0\Rightarrow x^2(t_1)+2\geq 2>0\Rightarrow x^2(t_1)+2>0\Rightarrow \\ x^2(t_1)+2\neq 0\end{array}\right)$$

$$x^2(t_1)-1=0\Leftrightarrow x^2(t_1)=1\overset{x(t)>0}{\Longleftrightarrow} x(t_1)=1$$

$$y_{\mathrm{M}}{}'(t)=\left(x^2(t)\right)'=2x(t)x'(t)$$

Τ$\eta\nu$ $\chi\rho o\nu\iota\kappa\acute{\eta}$ $\sigma\tau\iota\gamma\mu\acute{\eta}$ $t=t_1$ $\theta\alpha$ $\acute{\varepsilon}\chi\omega$:

$$y_{\mathrm{M}}{}'(t_1)=2x(t_1)x'(t_1)=4\bullet 1=4m/s$$

$$(\mathrm{III})\,\mathrm{E}=\frac{1}{2}\mathrm{OH}\bullet\mathrm{MK}=\frac{1}{2}\frac{x}{2}\bullet x=\frac{x^2}{4}$$

$$\mathrm{E}(t)=\frac{x^2(t)}{4}$$

$$\mathrm{E}'(t)=\frac{1}{4}\left(x^2(t)\right)'=\frac{1}{4}2x(t)x'(t)=\frac{x(t)x'(t)}{2}$$

Τ$\eta\nu$ $\chi\rho o\nu\iota\kappa\acute{\eta}$ $\sigma\tau\iota\gamma\mu\acute{\eta}$ t_2 $\acute{\varepsilon}\chi\omega$ $\mathrm{HO}=5m$:

$$\frac{x(t_2)}{2}=5\Leftrightarrow x(t_2)=10m$$

Ο *ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου* ΟΜΗ *την χρονική στιγμή* t_2 *θα είναι*:

$$\mathrm{E}'(t_2)=\frac{x(t_2)x'(t_2)}{2}=\frac{10\bullet \cancel{4}^{2}}{\cancel{2}_{1}}=10\bullet 2=20m^2/s$$

(IV) Σ*το ορθογώνιο τρίγωνο* ΜΟΚ $\left(\hat{\mathrm{K}}=90^0\right)$ *θα έχω*:

$$\varepsilon\varphi\,\mathrm{M}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{H}=\frac{\mathrm{MK}}{\mathrm{KO}}\Rightarrow \varepsilon\varphi\theta(t)=\frac{x^2(t)}{x(t)}\Rightarrow \varepsilon\varphi\theta(t)=x(t)\Rightarrow\left(\varepsilon\varphi\theta(t)\right)'=x'(t)$$

$$\Rightarrow\frac{\theta'(t)}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}=4\Rightarrow\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}\theta'(t)=4\Rightarrow\left[1+\varepsilon\varphi^2\theta(t)\right]\theta'(t)=4\Rightarrow$$

$$\theta'(t)=\frac{4}{1+\varepsilon\varphi^2\theta(t)}>0$$

Σ*υνεπώς γωνία* $\mathrm{M}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{H}$ *με την πάροδο του χρόνου αυξάνεται.*

16.

$\acute{E}\sigma\tau\omega\ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ \mu\iota\alpha\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f(0)=3\ \eta\ o\pi o\acute{\iota}\alpha\ \epsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\epsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \kappa\alpha\iota$ $\iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\epsilon\iota:$

$f^2(x)=9+2xf(x),x\in\mathbb{R}$

$\alpha.$ Να δείξετε ότι $f(x)=x+\sqrt{x^2+9}$

$\beta.$ Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

$\gamma.$ Να αποδείξετε ότι $f(x)=f'(x)\sqrt{x^2+9}$

$\delta.$ Να υπολογίσετε το $\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x^2+9}}dx$

$\alpha.$ $f^2(x)=9+2xf(x)\Leftrightarrow f^2(x)-2xf(x)=9 \overset{\text{Προσθέτω και στα μέλη το } x^2}{\Longleftrightarrow}$

$f^2(x)-2\bullet f(x)\bullet x+x^2=9+x^2 \overset{(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2}{\Longleftrightarrow} \left[f(x)-x\right]^2=9+x^2$

$\sqrt{\left[f(x)-x\right]^2}=\sqrt{9+x^2} \overset{\sqrt{\alpha^2}=|\alpha|}{\Longleftrightarrow} |f(x)-x|=\sqrt{9+x^2}$

Θεωρώ την συνάρτηση $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $h(x)=f(x)-x$

Τότε θα έχω: $|h(x)|=\sqrt{9+x^2},x\in\mathbb{R}$

Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχω:

$x^2\ge0\Rightarrow x^2+9\ge9>0\Rightarrow x^2+9>0\Rightarrow\sqrt{x^2+9}>0\Rightarrow\sqrt{x^2+9}\ne0$

$\overset{|h(x)|=\sqrt{9+x^2}}{\Longrightarrow} |h(x)|\ne0\Rightarrow h(x)\ne0$

Έχω: $\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{I})\ h(x)\ne0 \text{ για κάθε } x\in(-\infty,+\infty)\\ (\mathrm{II})\ \text{Η συνάρτηση } h \text{ είναι συνεχής στο } (-\infty,+\infty) \text{ ως}\\ \text{διαφορά συνεχών συναρτήσεων}\end{array}\right\}$

Οπότε $h(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty,+\infty)$ ή $h(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,+\infty)$

$Έχω: h(0) = f(0) - 0 = f(0) = 3 > 0$

Επειδή $h(0) > 0$ θα έχω $h(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, +\infty)$. Συνεπώς

$|h(x)| = h(x)$

$$|h(x)| = \sqrt{9+x^2} \overset{|h(x)|=h(x)}{\Leftrightarrow} |h(x)| = \sqrt{9+x^2} \Leftrightarrow h(x) = \sqrt{9+x^2} \overset{h(x)=f(x)-x}{\Leftrightarrow}$$

$$f(x) - x = \sqrt{9+x^2} \Rightarrow f(x) = x + \sqrt{9+x^2}$$

$\beta.\ x \to -\infty \Rightarrow x < 0 \Rightarrow |x| = -x$

$$f(x) = x + \sqrt{9+x^2} = x + \sqrt{x^2\left(1+\frac{9}{x^2}\right)} = x + \sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{9}{x^2}} \overset{\sqrt{a^2}=|a|}{=} x + |x|\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}$$

$$\overset{|x|=-x}{=} x - x\sqrt{1+\frac{9}{x^2}} = x\left(1-\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty} x = -\infty, \lim_{x\to-\infty}\left(1-\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}\right) = 1-\sqrt{1+\lim_{x\to-\infty}\frac{9}{x^2}} = 1-\sqrt{1+0} = 1-1 = 0$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{9+x^2}+x}{1} \overset{\substack{\text{Πολλαπλασιάζω αριθμητή} \\ \text{και παρονομαστή με το} \\ \sqrt{9+x^2}-x}}{=} \frac{\left(\sqrt{9+x^2}+x\right)\left(\sqrt{9+x^2}-x\right)}{\sqrt{9+x^2}-x} \overset{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=\alpha^2-\beta^2}{=}$$

$$\frac{\left(\sqrt{9+x^2}\right)^2 - x^2}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{9}{x^2}\right)}-x} \overset{\left(\sqrt{\alpha}\right)^2=\alpha,\alpha\geq0}{=} \frac{9+x^2-x^2}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}-x} = \frac{9}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}-x} \overset{\sqrt{a^2}=|a|}{=}$$

$$\frac{9}{|x|\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}-x} \overset{|x|=-x}{=} \frac{9}{-x\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}-x} = \frac{9}{-x\left(\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}+1\right)} = -\frac{1}{x}\frac{9}{\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}+1}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\frac{9}{\sqrt{1+\lim_{x\to-\infty}\frac{9}{x^2}}+1} = -0\frac{9}{\sqrt{1+0}+1} = 0$$

$\gamma.$ $\boxed{\left(\sqrt{F(x)}\right)' = \frac{F'(x)}{2\sqrt{F(x)}}, F(x) > 0}$

$$f'(x) = \left(x+\sqrt{9+x^2}\right)' = (x)' + \left(\sqrt{9+x^2}\right)' = 1 + \frac{\left(9+x^2\right)'}{2\sqrt{9+x^2}} = 1 + \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{9+x^2}} =$$

$$1+\frac{x}{\sqrt{9+x^2}}=\frac{\sqrt{9+x^2}}{\sqrt{9+x^2}}+\frac{x}{\sqrt{9+x^2}}=\frac{x+\sqrt{9+x^2}}{\sqrt{9+x^2}}$$

$$f'(x)\sqrt{9+x^2}=\frac{x+\sqrt{9+x^2}}{\cancel{\sqrt{9+x^2}}}\cancel{\sqrt{9+x^2}}=x+\sqrt{9+x^2}=f(x)$$

$$\delta.\ I=\int_0^1\frac{x+1}{\sqrt{x^2+9}}dx=\int_0^1\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}dx+\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x^2+9}}dx\,(1)$$

$$\int_0^1\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}dx\overset{\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}},a\geq 0}{=}\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x}{\left(x^2+9\right)^{\frac{1}{2}}}dx\overset{a^{-x}=\frac{1}{a^x},a\neq 0}{=}\frac{1}{2}\int_0^1\left(x^2+9\right)^{-\frac{1}{2}}\left(x^2+9\right)'dx$$

$$\overset{\text{Παράγουσα της } f^a f' \text{ είναι η } \frac{f^{a+1}}{\alpha+1},\alpha\neq -1}{=}\frac{1}{2}\left[\frac{\left(x^2+9\right)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right]_0^1=\frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{x^2+9}}{\frac{1}{2}}\right]_0^1=\frac{1}{2}\left[2\sqrt{x^2+9}\right]_0^1=$$

$$\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}\left[\sqrt{x^2+9}\right]_0^1=\left[\sqrt{x^2+9}\right]_0^1=\sqrt{1^2+9}-\sqrt{0^2+9}=\sqrt{10}-3$$

$$f(x)=f'(x)\sqrt{x^2+9}\Leftrightarrow\sqrt{x^2+9}=\frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x^2+9}}dx\overset{\sqrt{x^2+9}=\frac{f(x)}{f'(x)}}{=}\int_0^1\frac{1}{\frac{f(x)}{f'(x)}}dx=\int_0^1\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\left[\ln\left|f(x)\right|\right]_0^1=$$

$$\ln\left|f(1)\right|-\ln\left|f(0)\right|\overset{f(x)=x+\sqrt{x^2+9}}{=}\ln\left(1+\sqrt{10}\right)-\ln 3$$

Τότε απο την σχέση (1) θα έχω:

$$I=\int_0^1\frac{x+1}{\sqrt{x^2+9}}dx=\int_0^1\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}dx+\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x^2+9}}dx\overset{\substack{\int_0^1\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}dx=\sqrt{10}-3\\ \int_0^1\frac{1}{\sqrt{x^2+9}}dx=\ln\left(1+\sqrt{10}\right)-\ln 3}}{=}$$

$$\sqrt{10}-3+\ln\left(1+\sqrt{10}\right)-\ln 3$$